ANALIZA A3 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 11, 14.01.2008

Zadanie **21.**

Zastosować twierdzenie Stokes'a do całki krzywoliniowej

$$\int_{\partial S} xdy + zdz$$

i powierzchni

$$S = \{(x,y,z) : x+2 \leqslant x^2+y^2 = z \leqslant x+12\}.$$

Obliczyć obie strony wzoru i porównać wyniki.

Rozwiązanie:

Zastosowanie wzoru Stokes'a daje

$$\int_{\partial S} xdy + zdz = \iint_S 1 \cdot dx\, dy\,. \tag{635318657}$$

Powierzchnia S jest wykresem funkcji, ma więc naturalną parametryzację parametrami x, y

$$x = x$$

$$y = y$$

$$z = x^2 + y^2\,,$$

gdzie

$$x+2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant x+12$$

$$2.25 \leqslant x^2 - x + 1/4 + y^2 \leqslant 12.25$$

$$(3/2)^2 \leqslant (x-1/2)^2 + y^2 \leqslant (7/2)^2\,.$$

Parametryzacja ta wyznacza orientację powierzchni S do góry. Oznaczając

$$\Omega = \left\{(x,y) : (3/2)^2 \leqslant (x-1/2)^2 + y^2 \leqslant (7/2)^2\right\}$$

otrzymujemy

$$\iint_S 1 \cdot dx\, dy = \iint_\Omega 1 \cdot \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot dx\, dy = \iint_\Omega 1 \cdot dx\, dy\,,$$

co jest równe polu pierścienia kołowego Ω

$$\left((7/2)^2 - (3/2)^2\right) \cdot \pi = 10\pi\,.$$

Obliczyliśmy więc wartość całki występującej po prawej stronie wzoru (635318657).

Aby obliczyć wartość całki występującej po lewej stronie wzoru (635318657), należy zrozumieć, czym jest brzeg powierzchni S. Otóż składa się on z dwóch elips $E(R,H)$ o parametryzacji postaci

$$x = 1/2 + R\cos t$$

$$y = R\sin t$$

$$z = H + 1/2 + R\cos t$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

Jedną elipsę otrzymujemy dla $R = 7/2$ oraz $H = 12$, a drugą dla $R = 3/2$ oraz $H = 2$, przy czym parametryzacja drugiej elipsy jest przeciwna do skierowania elipsy jako brzegu powierzchni S. Obliczamy

$$\int\limits_{E(R,H)} xdy + zdz = \int\limits_0^{2\pi} (1/2 + R\cos t) \cdot R\cos t + (H + 1/2 + R\cos t) \cdot R(-\sin t) dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} 1/2 \cdot R\cos t + R^2\cos^2 t - (H + 1/2) \cdot R\sin t - R^2 \cos t \sin t dt = \int\limits_0^{2\pi} R^2 \cos^2 t dt = R^2\pi\,.$$

Zatem lewa strona wzoru (635318657) ma wartość

$$\int\limits_{E(7/2,12)} xdy + zdz - \int\limits_{E(3/2,2)} xdy + zdz = (7/2)^2\pi - (3/2)^2\pi = 10\pi\,.$$

Zadanie **22.**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z) = 5x + 5y + z$$

na zbiorze

$$S = \left\{(x,y,z):\, x^2 + y^2 + z^2 = 9 \wedge x + y + z \geqslant 5\right\}$$

oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

1° Na czaszy sferycznej określonej warunkami

$$g(x,y,z) = 0, \qquad x + y + z > 5\,,$$

gdzie $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$, otrzymujemy

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = (5,5,1)$$

oraz

$$\mathrm{grad}\, g(x,y,z) = (2x,2y,2z) = 2(x,y,z)\,.$$

Ponieważ wektor $(5,5,1)$ jest niezerowy, powyższe gradienty są liniowo zależne, gdy wektor (x,y,z) jest wielokrotnością wektora $(5,5,1)$, a więc, gdy $x=y=5z$. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 9 \\ x &= 5z \\ y &= 5z \end{cases}$$

otrzymujemy kolejno

$$25z^2+25z^2+z^2=9$$

$$51z^2=9$$

$$z=\pm 3/\sqrt{51}$$

$$y=\pm 15/\sqrt{51}$$

$$x=\pm 15/\sqrt{51}\,.$$

Wobec nierówności $x+y+z>5$ za "$\pm$" przyjmujemy "$+$".

Jednak wówczas

$$x+y+z=\frac{33}{\sqrt{51}}<\frac{35}{\sqrt{49}}=5\,,$$

skąd wynika, że także punkt $(3/\sqrt{51},\, 15/\sqrt{51},\, 15/\sqrt{51})$ nie należy do rozważanej w tym przypadku czaszy.

Zatem ten przypadek nie prowadzi do znalezienia żadnych punktów krytycznych funkcji f.

2° Na okręgu określonym równaniami

$$g(x,y,z)=0, \qquad h(x,y,z)=0\,,$$

gdzie $h(x,y,z)=x+y+z-5$, otrzymujemy

$$\mathrm{grad}\, f(x,y,z)=(5,5,1)$$

$$\mathrm{grad}\, g(x,y,z)=(2x,2y,2z)=2(x,y,z)$$

oraz

$$\operatorname{grad} h(x,y,z) = (1,1,1)\,.$$

Powyższe gradienty są liniowo zależne, gdy wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jest równy zero. Obliczamy

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -4x + 4y$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 9 \\ x+y+z &= 5 \\ x &= y \end{cases}$$

otrzymujemy kolejno

$$2x + z = 5$$

$$z = 5 - 2x$$

$$2x^2 + (5-2x)^2 = 9$$

$$2x^2 + 25 - 20x + 4x^2 = 9$$

$$6x^2 - 20x + 16 = 0$$

$$3x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$x = 4/3 \quad \vee \quad x = 2$$

i odpowiednio

$$z = 7/3 \qquad\qquad z = 1\,.$$

Obliczamy wartości funkcji f w otrzymanych punktach krytycznych:

$$f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = 20/3 + 20/3 + 7/3 = 47/3$$

$$f(2,2,1) = 10 + 10 + 1 = 21 = 63/3 > 47/3\,.$$

Odpowiedź: Na podanym zbiorze funkcja f osiąga najmniejszą wartość $47/3$ w punkcie $(4/3, 4/3, 7/3)$, a wartość największą równą 21 w punkcie $(2, 2, 1)$.