ANALIZA A3 Wykład: J. Wróblewski
KOLOKWIUM nr 10, 7.01.2008

Zadanie **20.**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z)=4x+4y+3z+|4y-2z|$$

na sferze

$$S=\left\{(x,y,z):\, x^2+y^2+z^2=1\right\}$$

oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

1° Na półsferze określonej warunkami

$$x^2+y^2+z^2-1=0, \qquad 2y-z>0$$

funkcja przyjmuje postać

$$f(x,y,z)=4x+8y+z\,.$$

Wówczas oznaczając $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ otrzymujemy

$$\mathrm{grad} f(x,y,z)=(4,8,1)$$

oraz

$$\mathrm{grad} g(x,y,z)=(2x,2y,2z)=2(x,y,z)\,.$$

Ponieważ wektor $(4,8,1)$ jest niezerowy, powyższe gradienty są liniowo zależne, gdy wektor (x,y,z) jest wielokrotnością wektora $(4,8,1)$, a więc, gdy $x=4z$ oraz $y=8z$. Rozwiązując układ równań

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 & = & 1 \\ x & = & 4z \\ y & = & 8z \end{array}\right.$$

otrzymujemy kolejno

$$16z^2+64z^2+z^2=1$$

$$81z^2=1$$

$$z=\pm 1/9$$

$$y=\pm 8/9$$

$$x=\pm 4/9\,.$$

Wobec nierówności $2y-z>0$ za "$\pm$" przyjmujemy "$+$".

Obliczamy wartość funkcji f w otrzymanym punkcie krytycznym:

$$f\left(\frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{9}\right) = 9\,.$$

2° Na półsferze określonej warunkami

$$x^2+y^2+z^2-1=0, \qquad 2y-z<0$$

funkcja przyjmuje postać

$$f(x,y,z)=4x+5z\,.$$

Wówczas oznaczając $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ otrzymujemy

$$\operatorname{grad} f(x,y,z)=(4,0,5)$$

oraz

$$\operatorname{grad} g(x,y,z)=(2x,2y,2z)=2(x,y,z)\,.$$

Ponieważ wektor $(4,0,5)$ jest niezerowy, powyższe gradienty są liniowo zależne, gdy wektor (x,y,z) jest wielokrotnością wektora $(4,0,5)$, a więc, gdy $z=5x/4$ oraz $y=0$. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ z &= 5x/4 \\ y &= 0 \end{cases}$$

otrzymujemy kolejno

$$x^2+25x^2/16=1$$

$$41x^2/16=1$$

$$x=\pm 4/\sqrt{41}$$

$$z=\pm 5/\sqrt{41}\,.$$

Wobec nierówności $2y-z<0$ za "$\pm$" przyjmujemy "$+$".

Obliczamy wartość funkcji f w otrzymanym punkcie krytycznym:

$$f\left(\frac{4}{\sqrt{41}}, 0, \frac{5}{\sqrt{41}}\right)=\sqrt{41}\,.$$

3° Na okręgu określonym równaniami

$$x^2+y^2+z^2-1=0, \qquad 2y-z=0$$

funkcja przyjmuje postać

$$f(x,y,z)=4x+4y+3z\,.$$

Wówczas oznaczając $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ oraz $g_2(x,y,z) = 2y - z$ otrzymujemy

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = (4,4,3)$$

$$\mathrm{grad} g_1(x,y,z) = (2x,2y,2z) = 2(x,y,z)$$

oraz

$$\mathrm{grad} g_2(x,y,z) = (0,2,-1)\,.$$

Powyższe gradienty są liniowo zależne, gdy wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

jest równy zero. Obliczamy

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 10x - 4y - 8z$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ 2y &= z \\ 10x - 4y - 8z &= 0 \end{cases}$$

otrzymujemy kolejno

$$10x - 20y = 0$$

$$x = 2y$$

$$4y^2 + y^2 + 4y^2 = 1$$

$$9y^2 = 1$$

$$y = \pm 1/3$$

$$z = \pm 2/3$$

$$x = \pm 2/3\,.$$

Obliczamy wartości funkcji f w otrzymanych punktach krytycznych:

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = 6$$

$$f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -6\,.$$

Odpowiedź: Na podanym zbiorze funkcja f osiąga najmniejszą wartość -6 w punkcie $(-2/3, -1/3, -2/3)$, a wartość największą równą 9 w punkcie $(4/9, 8/9, 1/9)$.