ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 5, zestaw B, 14.11.2006

Zadanie **9.**

Wskazać liczbę naturalną k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2\cdot\sqrt[6]{n^k+1}}{n^2+5\cdot\sqrt[3]{n^7+7}+7\cdot\sqrt{n^5+5}}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Rozwiązanie:

Dzieląc licznik i mianownik danego wyrażenia przez $n^{5/2}$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2\cdot\sqrt[6]{n^k+1}}{n^2+5\cdot\sqrt[3]{n^7+7}+7\cdot\sqrt{n^4+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n^{1/2}}+2\cdot\sqrt[6]{n^{k-15}+\frac{1}{n^{15}}}}{\frac{1}{n^{1/2}}+5\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{n^{1/2}}+\frac{7}{n^{15/2}}}+7\cdot\sqrt{1+\frac{5}{n^5}}}\,.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia dąży do 7 przy $n\to\infty$, natomiast licznik ma granicę skończoną dodatnią dla $k=15$ i granica licznika jest wtedy równa 2.

Odpowiedź: Przy $k=15$ granica jest równa $2/7$.

Uwaga: Liczba $k=15$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania. Jednak zgodnie z poleceniem wystarczyło wskazać k, bez konieczności uzasadnienia, że takie k jest tylko jedno.

Zadanie **10.**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n\cdot\binom{2n-1}{n}<\frac{5^n}{4}\,.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy $n\cdot\binom{2n-1}{n}=1$ oraz $\frac{5^n}{4}=5/4$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $1<5/4$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$n\cdot\binom{2n-1}{n}<\frac{5^n}{4}\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+1)\cdot\binom{2n+1}{n+1}<\frac{5^{n+1}}{4}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$(n+1)\cdot\binom{2n+1}{n+1}=\frac{(n+1)(2n+1)!}{(n+1)!n!}=\frac{(n+1)(2n-1)!2n(2n+1)}{n!(n+1)(n-1)!n}=$$

$$=n\cdot\binom{2n-1}{n}\cdot\frac{(n+1)2n(2n+1)}{n(n+1)n}=n\cdot\binom{2n-1}{n}\cdot\frac{2(2n+1)}{n}<\frac{5^n}{4}\cdot\frac{4n+2}{n}\leqslant\frac{5^n}{4}\cdot5=\frac{5^{n+1}}{4}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{4n+2}{n}\leqslant5\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$4n+2\leqslant5n\,,$$

czyli $n\geqslant2$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n\geqslant2$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$, gdyż to sprawdzenie okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego:

$$2\cdot\binom{3}{2}=6<25/4=\frac{5^2}{4}\,.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant2$, a ponadto na początku rozwiązania wykonaliśmy sprawdzenie dla $n=1$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n=2$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{4n+2}{n}\leqslant5$$

pojawi się nierówność

$$\frac{4n+2}{n}<5\,,$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n>2$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n=3$.