

ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski  
KOŁOKWIUM nr **5**, zestaw **A**, 14.11.2006

*Zadanie 9.*

Wskazać liczbę naturalną  $k$ , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2 \cdot \sqrt[6]{n^k + 1}}{n^2 + 5 \cdot \sqrt[3]{n^7 + 7} + 7 \cdot \sqrt{n^4 + 4}}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie  $k$ .

*Rozwiązanie:*

Dzieląc licznik i mianownik danego wyrażenia przez  $n^{7/3}$  otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2 \cdot \sqrt[6]{n^k + 1}}{n^2 + 5 \cdot \sqrt[3]{n^7 + 7} + 7 \cdot \sqrt{n^4 + 4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n^{1/3}} + 2 \cdot \sqrt[6]{n^{k-14} + \frac{1}{n^{14}}}}{\frac{1}{n^{1/3}} + 5 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{7}{n^7}} + 7 \cdot \sqrt{\frac{1}{n^{2/3}} + \frac{4}{n^{14/3}}}}.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia dąży do 5 przy  $n \rightarrow \infty$ , natomiast licznik ma granicę skończoną dodatnią dla  $k = 14$  i granica licznika jest wtedy równa 2.

**Odpowiedź:** Przy  $k = 14$  granica jest równa  $2/5$ .

**Uwaga:** Liczba  $k = 14$  jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania. Jednak zgodnie z poleceniem wystarczyło wskazać  $k$ , bez konieczności uzasadnienia, że takie  $k$  jest tylko jedno.

*Zadanie 10.*

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{2n}{n} < \frac{5^n}{2}.$$

*Rozwiązanie:*

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

Dla  $n = 1$  mamy  $n \cdot \binom{2n}{n} = 2$  oraz  $\frac{5^n}{2} = 5/2$ , a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać  $2 < 5/2$ , jest więc prawdziwa.

Niech teraz  $n$  będzie taką liczbą naturalną, że

$$n \cdot \binom{2n}{n} < \frac{5^n}{2}.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+1) \cdot \binom{2n+2}{n+1} < \frac{5^{n+1}}{2}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n+1) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(n+1)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+1)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= n \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)(2n+2)}{n(n+1)(n+1)} = n \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(2n+1)}{n} < \frac{5^n}{2} \cdot \frac{4n+2}{n} \leq \frac{5^n}{2} \cdot 5 = \frac{5^{n+1}}{2}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{4n+2}{n} \leq 5.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$4n+2 \leq 5n,$$

czyli  $n \geq 2$ .

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla  $n \geq 2$ .

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla  $n=2$ , gdyż to sprawdzenie okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego:

$$2 \cdot \binom{4}{2} = 12 < 25/2 = \frac{5^2}{2}.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 2$ , a ponadto na początku rozwiązania wykonaliśmy sprawdzenie dla  $n=1$ .

### **Uwagi:**

Sprawdzenie dla  $n=2$  nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{4n+2}{n} \leq 5$$

pojawi się nierówność

$$\frac{4n+2}{n} < 5,$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla  $n > 2$ . Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla  $n=3$ .