ANALIZA A3 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 5, 19.11.2007

Zadanie **9.**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z)=2x+2y-xy$$

na zbiorze

$$Z=\left\{(x,y,z):\, x^2+y^2+z^2=5\wedge x^2+y+z^2=3\right\}$$

oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Oznaczmy

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-5$$

oraz

$$g_2(x,y,z)=x^2+y+z^2-3\,.$$

Wówczas

$$\mathrm{grad} f(x,y,z)=(2-y,\,2-x,\,0)$$

$$\mathrm{grad} g_1(x,y,z)=(2x,\,2y,\,2z)=2(x,\,y,\,z)$$

oraz

$$\mathrm{grad} g_2(x,y,z)=(2x,\,1,\,2z)\,.$$

Powyższe gradienty są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy utworzonej z ich współrzędnych jest równy 0. Tworząc macierz możemy podzielić gradg_1 przez 2, gdyż nie wpłynie to na zerowość wyznacznika, a uprości nieco rachunki. Obliczając ten wyznacznik otrzymujemy

$$\det\begin{pmatrix} 2-y & 2-x & 0 \\ x & y & z \\ 2x & 1 & 2z \end{pmatrix}=(2-y)y2z+(2-x)z2x-(2-y)z-(2-x)x2z=$$

$$=(2-y)(2y-1)z\,.$$

Równanie

$$(2-y)(2y-1)z=0$$

jest równoważne alternatywie

$$y=2 \quad \vee \quad y=1/2 \quad \vee \quad z=0\,.$$

1° W przypadku $y=2$ otrzymujemy układ równań

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 &=& 5 \\ x^2+y+z^2 &=& 3 \\ y &=& 2 \end{array}\right.$$

co prowadzi do

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+4+z^2 &=& 5 \\ x^2+2+z^2 &=& 3 \\ y &=& 2 \end{array}\right.$$

Pierwsze dwa równania są równoważne, skąd otrzymujemy

(1369)
$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+z^2 &=& 1 \\ y &=& 2 \end{array}\right.$$

W tym przypadku otrzymujemy więc okrąg złożony z punktów krytycznych. Na tym okręgu (a nawet w całej płaszczyźnie o równaniu $y=2$ zawierającej ten okrąg) otrzymujemy

$$f(x,y,z)=2x+2y-xy=2x+2\cdot 2-2x=4\,.$$

2° W przypadku $y=1/2$ otrzymujemy układ równań

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 &=& 5 \\ x^2+y+z^2 &=& 3 \\ y &=& 1/2 \end{array}\right.$$

co prowadzi kolejno do

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+1/4+z^2 &=& 5 \\ x^2+1/2+z^2 &=& 3 \\ y &=& 1/2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+z^2 &=& 19/4 \\ x^2+z^2 &=& 5/2 \\ y &=& 1/2 \end{array}\right.$$

Pierwsze dwa równania są sprzeczne, zatem ten przypadek nie dostarcza nam żadnych punktów krytycznych.

3° W przypadku $z=0$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 5 \\ x^2+y+z^2 &= 3 \\ z &= 0 \end{cases}$$

co prowadzi kolejno do

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 5 \\ x^2+y &= 3 \\ z &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 5 \\ y^2 &= y+2 \\ z &= 0 \end{cases}$$

Równanie $y^2=y+2$ ma rozwiązania $y=2$ oraz $y=-1$. Ponieważ przypadek $y=2$ już rozpatrzyliśmy, pozostaje rozważenie przypadku $y=-1$, co prowadzi do $x^2=4$ i w konsekwencji $x=\pm 2$. Otrzymujemy więc dwa nowe punkty krytyczne. Obliczamy wartość funkcji w tych punktach:

$$f(2,-1,0)=4-2+2=4$$

$$f(-2,-1,0)=-4-2-2=-8$$

Odpowiedź: Na podanym zbiorze funkcja f osiąga najmniejszą wartość -8 w punkcie $(-2,-1,0)$), a wartość największą równą 4 w punkcie $(2,-1,0)$ oraz na okręgu określonym równaniami (1369).

Zadanie **10.**

Wyznaczyć współrzędne środka ciężkości krzywej

$$K=\left\{(x,y):\, 0\leqslant x\leqslant 3 \wedge y=\sqrt{x}\cdot\left(1-\frac{x}{3}\right)\right\}.$$

Rozwiązanie:

Współrzędne środka ciężkości krzywej K dane są wzorami

$$x_s=\frac{\int\limits_K x\,ds}{\int\limits_K 1\,ds}$$

oraz

$$y_s=\frac{\int\limits_K y\,ds}{\int\limits_K 1\,ds}$$

Ponieważ krzywa K jest wykresem funkcji, jej naturalna parametryzacja dana jest wzorem

$$\varphi(t) = \left(t, \sqrt{t} - \frac{t^{3/2}}{3}\right), \qquad t \in [0,3]\,.$$

Wówczas

$$\varphi'(t) = \left(1, \frac{t^{-1/2}}{2} - \frac{t^{1/2}}{2}\right)$$

skąd

$$\sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{t^{-1/2}}{2} - \frac{t^{1/2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{t^{-1}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{t}{4}} = \sqrt{\frac{t^{-1}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{t}{4}} = \ldots$$

I co teraz? Niby nietrudna tożsamość, ale nie każdy ją zauważy - dlatego punktacja za zadanie jest wysoka. Bez tej tożsamości chyba niewiele da się zdziałać.

$$\ldots = \sqrt{\left(\frac{t^{-1/2}}{2} + \frac{t^{1/2}}{2}\right)^2} = \frac{t^{-1/2} + t^{1/2}}{2}\,.$$

To pozwala obliczać całki krzywoliniowe po krzywej K. I tak otrzymujemy kolejno

$$\int_K 1\,ds = \int_0^3 1 \cdot \frac{t^{-1/2} + t^{1/2}}{2}\,dt = t^{1/2} + \frac{t^{3/2}}{3}\Bigg|_{t=0}^{3} = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\int_K x\,ds = \int_0^3 t \cdot \frac{t^{-1/2} + t^{1/2}}{2}\,dt = \int_0^3 \frac{t^{1/2} + t^{3/2}}{2}\,dt = \frac{t^{3/2}}{3} + \frac{t^{5/2}}{5}\Bigg|_{t=0}^{3} = \sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{5} = \frac{14\sqrt{3}}{5}$$

$$\int_K y\,ds = \int_0^3 \left(\sqrt{t} - \frac{t^{3/2}}{3}\right) \cdot \frac{t^{-1/2} + t^{1/2}}{2}\,dt = \int_0^3 \frac{1}{2} + \frac{t}{2} - \frac{t}{6} - \frac{t^2}{6}\,dt = \int_0^3 \frac{1}{2} + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{6}\,dt =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} - \frac{t^3}{18}\Bigg|_{t=0}^{3} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Zatem

$$x_s = \frac{14\sqrt{3}/5}{2\sqrt{3}} = \frac{7}{5}$$

oraz

$$y_s = \frac{3/2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Odpowiedź: Środkiem ciężkości danej w zadaniu krzywej jest punkt $(7/5, \sqrt{3}/4)$.