ANALIZA A3 Wykład: J. Wróblewski
KOLOKWIUM nr 3, 5.11.2007

Zadanie **5.**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z)=3x+5y+z+|y+z|$$

na zbiorze

$$Z=\left\{(x,y,z):\, x^2+y^2+z^2=1\right\}$$

oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

1° Na półsferze określonej warunkami

$$x^2+y^2+z^2-1=0, \qquad y+z>0$$

funkcja przyjmuje postać

$$f(x,y,z)=3x+6y+2z\,.$$

Wówczas oznaczając $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ otrzymujemy

$$\mathrm{grad} f(x,y,z)=(3,6,2)$$

oraz

$$\mathrm{grad} g(x,y,z)=(2x,2y,2z)=2(x,y,z)\,.$$

Ponieważ wektor $(3,6,2)$ jest niezerowy, powyższe gradienty są liniowo zależne, gdy wektor (x,y,z) jest wielokrotnością wektora $(3,6,2)$, a więc, gdy $y=3z$ oraz $x=3z/2$. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ y &= 3z \\ x &= 3z/2 \end{cases}$$

otrzymujemy kolejno

$$9z^2/4+9z^2+z^2=1$$

$$49z^2/4=1$$

$$z=\pm 2/7$$

$$y=\pm 6/7$$

$$x=\pm 3/7\,.$$

Wobec nierówności $y+z>0$ za "$\pm$" przyjmujemy "$+$".

Obliczamy wartość funkcji f w otrzymanym punkcie krytycznym:

$$f\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{2}{7}\right)=7\,.$$

2° Na półsferze określonej warunkami

$$x^2+y^2+z^2-1=0, \qquad y+z<0$$

funkcja przyjmuje postać

$$f(x,y,z) = 3x + 4y\,.$$

Wówczas oznaczając $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ otrzymujemy

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = (3,4,0)$$

oraz

$$\mathrm{grad} g(x,y,z) = (2x,2y,2z) = 2(x,y,z)\,.$$

Ponieważ wektor (3,4,0) jest niezerowy, powyższe gradienty są liniowo zależne, gdy wektor (x,y,z) jest wielokrotnością wektora (3,4,0), a więc, gdy $z = 0$ oraz $x = 3y/4$. Rozwiązując układ równań

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + z^2 & = & 1 \\ z & = & 0 \\ x & = & 3y/4 \end{array} \right.$$

otrzymujemy kolejno

$$9y^2/16 + y^2 = 1$$

$$25y^2/16 = 1$$

$$y = \pm 4/5$$

$$x = \pm 3/5\,.$$

Wobec nierówności $y + z < 0$ za "$\pm$" przyjmujemy "$-$".

Obliczamy wartość funkcji f w otrzymanym punkcie krytycznym:

$$f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right) = -5\,.$$

3° Na okręgu określonym równaniami

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \qquad y + z = 0$$

funkcja przyjmuje postać

$$f(x,y,z) = 3x + 5y + z\,.$$

Wówczas oznaczając $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ oraz $g_2(x,y,z) = y + z$ otrzymujemy

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = (3,5,1)$$

$$\mathrm{grad} g_1(x,y,z) = (2x,2y,2z) = 2(x,y,z)$$

oraz

$$\mathrm{grad} g_2(x,y,z) = (0,1,1)\,.$$

Powyższe gradienty są liniowo zależne, gdy wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jest równy zero. Obliczamy

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3y + x - 5x - 3z$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ y+z &= 0 \\ 3y-4x-3z &= 0 \end{cases}$$

otrzymujemy kolejno

$$z = -y$$

$$6y - 4x = 0$$

$$x = 3y/2$$

$$9y^2/4 + y^2 + y^2 = 1$$

$$17y^2/4 = 1$$

$$y = \pm 2/\sqrt{17}$$

$$z = \mp 2/\sqrt{17}$$

$$x = \pm 3/\sqrt{17}\,.$$

Obliczamy wartości funkcji f w otrzymanych punktach krytycznych:

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}\right) = \sqrt{17} < 7$$

$$f\left(-\frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}\right) = -\sqrt{17} > -5\,.$$

Odpowiedź: Na podanym zbiorze funkcja f osiąga najmniejszą wartość -5 w punkcie $(-3/5, -4/5, 0)$, a wartość największą równą 7 w punkcie $(3/7, 6/7, 2/7)$.

Zadanie **6.**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z) = x + 4y + 9z$$

na zbiorze

$$Z = \left\{(x,y,z):\, x^3 + y^3 + z^3 = 1\right\}$$

oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Sposób I (długi, błędny, za 3 punkty)

Oznaczając $g(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 1$ otrzymujemy

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (1,4,9)$$

oraz

$$\mathrm{grad}\, g(x,y,z) = (3x^2, 3y^2, 3z^2) = 3(x^2, y^2, z^2)\,.$$

Ponieważ wektor $(1,4,9)$ jest niezerowy, powyższe gradienty są liniowo zależne, gdy wektor (x^2,y^2,z^2) jest wielokrotnością wektora $(1,4,9)$, a więc, gdy $y^2=4x^2$ oraz $z^2=9x^2$. Rozwiązując układ równań

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^3+y^3+z^3 & = & 1 \\ y^2 & = & 4x^2 \\ z^2 & = & 9x^2 \end{array}\right.$$

otrzymujemy kolejno

$$y = \pm_1 2x$$

$$z = \pm_2 3x$$

$$x^3 \pm_1 8x^3 \pm_2 27x^3 = 1$$

$$(1 \pm_1 8 \pm_2 27)x^3 = 1$$

$$x = 1/\sqrt[3]{1 \pm_1 8 \pm_2 27}$$

$$y = \pm_1 2/\sqrt[3]{1 \pm_1 8 \pm_2 27}$$

$$z = \pm_2 3/\sqrt[3]{1 \pm_1 8 \pm_2 27}\,.$$

Obliczamy wartości funkcji f w otrzymanych punktach krytycznych.

Dla $\pm_1 = +$ oraz $\pm_2 = +$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{36}}, \frac{2}{\sqrt[3]{36}}, \frac{3}{\sqrt[3]{36}}\right) = 36^{2/3}\,.$$

Dla $\pm_1 = +$ oraz $\pm_2 = -$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{18}}, -\frac{2}{\sqrt[3]{18}}, \frac{3}{\sqrt[3]{18}}\right) = 18^{2/3}\,.$$

Dla $\pm_1 = -$ oraz $\pm_2 = +$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{20}}, -\frac{2}{\sqrt[3]{20}}, \frac{3}{\sqrt[3]{20}}\right) = 20^{2/3}\,.$$

Dla $\pm_1 = -$ oraz $\pm_2 = -$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{34}}, \frac{2}{\sqrt[3]{34}}, \frac{3}{\sqrt[3]{34}}\right) = 34^{2/3}\,.$$

Odpowiedź: Na podanym zbiorze funkcja f osiąga najmniejszą wartość równą $18^{2/3}$, a wartość największą równą $36^{2/3}$, w punktach podanych wyżej.

Sposób II (krótki, poprawny, za 8 punktów)

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x punkt $(x,-x,1)$ należy do zbioru Z, a przy tym $f(x,-x,1) = -3x+9$. Ponieważ wyrażenie $-3x+9$ przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste, funkcja f na zbiorze Z przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste.

Odpowiedź: Na zbiorze Z funkcja f jest nieograniczona od góry i od dołu. Kresem dolnym zbioru jej wartości jest $-\infty$, a górnym $+\infty$.