

ANALIZA 1A Wykład: J. Wróblewski
KOŁOKWIUM nr 4, zestaw B, 7.11.2006

Zadanie 7.

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C , D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \leq D.$$

Rozwiązanie:

Szacując dane wyrażenie od góry otrzymujemy

$$\frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \leq \frac{4n^4 + 3n^4 - 0}{5n^4 - 4n^4 + 0} = \frac{7n^4}{n^4} = 7.$$

Z kolei szacowanie od dołu prowadzi do

$$\frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \geq \frac{4n^4 + 0 - 2n^4}{5n^4 - 0 + 2n^4} = \frac{2n^4}{7n^4} = \frac{2}{7}.$$

Zatem dane w zadaniu nierówności są spełnione ze stałymi $C = 2/7$ oraz $D = 7$.

Zadanie 8.

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

8.1 Czy prawdziwa jest nierówność

a) $1000! < 1000^{1000}$ **TAK**

b) $1000! < 10^{1800}$ **NIE**

c) $555^{33} < 33^{555}$ **TAK**

d) $2^{4444} < 444^{444}$ **NIE**

8.2 Czy jest prawdą, że

a) $\log_{11} 2 + \log_{11} 3 = \log_{11} 6$ **TAK**

b) $\log_{11} 2 \cdot \log_{11} 3 = \log_{11} 5$ **NIE**

c) $\log_5 2 < \log_5 3$ **TAK**

d) $\log_5 3 < \log_7 3$ **NIE**

8.3 Liczby a i b są różnymi liczbami niewymiernymi dodatnimi. Czy stąd wynika, że

a) liczba ab jest niewymierna **NIE**

b) co najmniej jedna z liczb ab oraz a/b jest liczbą niewymierną **NIE**

c) liczba $a - b$ jest niewymierna **NIE**

d) co najmniej jedna z liczb $a + b$ oraz $a - b$ jest liczbą niewymierną **TAK**

8.4 Dane są liczby rzeczywiste x i y spełniające warunki $|x - 5| < 1$ oraz $|y - 5| < 2$. Czy stąd wynika, że

a) $|x - y| < 2$ **NIE**

b) $|x + y| > 6$ **TAK**

c) $|xy| > 10$ **TAK**

d) $|xy| < 40$ **NIE**