

ANALIZA 1A Wykład: J. Wróblewski
KOŁOKWIUM nr 4, zestaw A, 7.11.2006

Zadanie 7.

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C , D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \leq D.$$

Rozwiązanie:

Szacując dane wyrażenie od góry otrzymujemy

$$\frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \leq \frac{4n^4 - 0 + 2n^4}{5n^4 + 0 - 2n^4} = \frac{6n^4}{3n^4} = 2.$$

Z kolei szacowanie od dołu prowadzi do

$$\frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \geq \frac{4n^4 - 3n^4 + 0}{5n^4 + 4n^4 - 0} = \frac{n^4}{9n^4} = \frac{1}{9}.$$

Zatem dane w zadaniu nierówności są spełnione ze stałymi $C = 1/9$ oraz $D = 2$.

Zadanie 8.

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

8.1 Czy prawdziwa jest nierówność

a) $1000! < 10^{3000}$ **TAK**

b) $1000! < 1000^{600}$ **NIE**

c) $22^{444} < 444^{22}$ **NIE**

d) $333^{333} < 3^{3333}$ **TAK**

8.2 Czy jest prawdą, że

a) $\log_7 2 \cdot \log_7 3 = \log_7 5$ **NIE**

b) $\log_7 2 + \log_7 3 = \log_7 6$ **TAK**

c) $\log_7 2 < \log_7 3$ **TAK**

d) $\log_5 2 < \log_7 2$ **NIE**

8.3 Liczby a i b są różnymi liczbami niewymiernymi dodatnimi. Czy stąd wynika, że

a) liczba $a + b$ jest niewymierna **NIE**

b) co najmniej jedna z liczb $a + b$ oraz $a - b$ jest liczbą niewymierną **TAK**

c) liczba a/b jest niewymierna **NIE**

d) co najmniej jedna z liczb ab oraz a/b jest liczbą niewymierną **NIE**

8.4 Dane są liczby rzeczywiste x i y spełniające warunki $|x - 4| < 1$ oraz $|y - 4| < 2$. Czy stąd wynika, że

a) $|x - y| < 2$ **NIE**

b) $|x + y| > 6$ **NIE**

c) $|xy| > 10$ **NIE**

d) $|xy| < 40$ **TAK**