ANALIZA 1A Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 3, zestaw B, 31.10.2006

Zadanie **5.**

Wszystkie wyrazy pięciowyrazowego potępu arytmetycznego są liczbami niewymiernymi. Dowieść, że suma tego postępu też jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie:

Niech a_1, a_2, ..., a_5 będą wyrazami postępu arytmetycznego, a r jego różnicą. Suma postępu jest wówczas równa

$$S=5\cdot\frac{a_1+a_5}{2}=5\cdot\frac{a_1+(a_1+4r)}{2}=5(a_1+2r)=5a_3\,.$$

Ponieważ z założenia wyrazy postępu są liczbami niewymiernymi, w szczególności wyraz a_3 jest liczbą niewymierną, a w konsekwencji suma postępu $S=5a_3$ jest liczbą niewymierną.

Zadanie **6.**

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $(4n)!$ nie jest podzielna przez 9^n.

Rozwiązanie:

Ponieważ $9=3^2$, zadanie polega na udowodnieniu, że liczba $(4n)!$ nie jest podzielna przez 3^{2n}.

Niech k będzie taką liczbą całkowitą, że

$$3^k \leqslant 4n < 3^{k+1}\,.$$

Wówczas w rozkładzie liczby $(4n)!$ na czynniki pierwsze liczba 3 występuje z wykładnikiem

$$\left[\frac{4n}{3}\right]+\left[\frac{4n}{3^2}\right]+\left[\frac{4n}{3^3}\right]+\ldots+\left[\frac{4n}{3^k}\right].$$

Korzystając z nierówności $[x]\leqslant x$ oraz ze wzoru na sumę k-wyrazowego postępu geometrycznego o ilorazie $q=1/3$ otrzymujemy

$$\left[\frac{4n}{3}\right]+\left[\frac{4n}{3^2}\right]+\left[\frac{4n}{3^3}\right]+\ldots+\left[\frac{4n}{3^k}\right]\leqslant \frac{4n}{3}+\frac{4n}{3^2}+\frac{4n}{3^3}+\ldots+\frac{4n}{3^k}=$$
$$=\frac{4n}{3}\cdot\frac{1-(1/3)^k}{1-1/3}=\frac{4n}{3}\cdot\frac{1-1/3^k}{2/3}=2n\cdot\left(1-\frac{1}{3^k}\right)<2n\,.$$

Zatem liczba 3 występuje w rozkładzie liczby $(4n)!$ na czynniki pierwsze z wykładnikiem **mniejszym** od $2n$, a to oznacza, że liczba $(4n)!$ nie jest podzielna przez $9^n=3^{2n}$.