ANALIZA 1A Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 3, zestaw A, 31.10.2006

Zadanie **5.**

Wszystkie wyrazy siedmiowyrazowego potępu arytmetycznego są liczbami niewymiernymi. Dowieść, że suma tego postępu też jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie:

Niech a_1, a_2, ..., a_7 będą wyrazami postępu arytmetycznego, a r jego różnicą. Suma postępu jest wówczas równa

$$S=7\cdot\frac{a_1+a_7}{2}=7\cdot\frac{a_1+(a_1+6r)}{2}=7(a_1+3r)=7a_4\,.$$

Ponieważ z założenia wyrazy postępu są liczbami niewymiernymi, w szczególności wyraz a_4 jest liczbą niewymierną, a w konsekwencji suma postępu $S=7a_4$ jest liczbą niewymierną.

Zadanie **6.**

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $(3n)!$ nie jest podzielna przez 8^n.

Rozwiązanie:

Ponieważ $8=2^3$, zadanie polega na udowodnieniu, że liczba $(3n)!$ nie jest podzielna przez 2^{3n}.

Niech k będzie taką liczbą całkowitą, że

$$2^k \leqslant 3n < 2^{k+1}\,.$$

Wówczas w rozkładzie liczby $(3n)!$ na czynniki pierwsze liczba 2 występuje z wykładnikiem

$$\left[\frac{3n}{2}\right]+\left[\frac{3n}{2^2}\right]+\left[\frac{3n}{2^3}\right]+\ldots+\left[\frac{3n}{2^k}\right].$$

Korzystając z nierówności $[x]\leqslant x$ oraz ze wzoru na sumę k-wyrazowego postępu geometrycznego o ilorazie $q=1/2$ otrzymujemy

$$\left[\frac{3n}{2}\right]+\left[\frac{3n}{2^2}\right]+\left[\frac{3n}{2^3}\right]+\ldots+\left[\frac{3n}{2^k}\right]\leqslant\frac{3n}{2}+\frac{3n}{2^2}+\frac{3n}{2^3}+\ldots+\frac{3n}{2^k}=$$
$$=\frac{3n}{2}\cdot\frac{1-(1/2)^k}{1-1/2}=\frac{3n}{2}\cdot\frac{1-1/2^k}{1/2}=3n\cdot\left(1-\frac{1}{2^k}\right)<3n\,.$$

Zatem liczba 2 występuje w rozkładzie liczby $(3n)!$ na czynniki pierwsze z wykładnikiem **mniejszym** od $3n$, a to oznacza, że liczba $(3n)!$ nie jest podzielna przez $8^n=2^{3n}$.