**ANALIZA A2** Wykład: J. Wróblewski

**KOLOKWIUM nr 12, zestaw B, 5.06.2007**

*Zadanie* **23.**

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu (o wyrazach zespolonych)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p+i}{n^9+i}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego $p$.

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy dany w zadaniu szereg na część rzeczywistą i urojoną.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p+i}{n^9+i}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^p+i)(n^9-i)}{(n^9+i)(n^9-i)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p+9}+1+i(n^9-n^p)}{n^{18}+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p+9}+1}{n^{18}+1}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9-n^p}{n^{18}+1}\,.$$

Dany w zadaniu szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie obydwa powyższe szeregi.

Dla $p\geqslant 8$ wykonujemy szacowanie od dołu szeregu części rzeczywistych.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p+9}+1}{n^{18}+1}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p+9}+0}{n^{18}+n^{18}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{9-p}}=+\infty\,,$$

gdyż $9-p\leqslant 1$. Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg części reczywistych jest rozbieżny, a co za tym idzie, rozbieżny jest szereg zespolony dany w treści zadania.

Dla $p<8$ wykonujemy szacowanie od góry szeregu części rzeczywistych.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p+9}+1}{n^{18}+1}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p+9}+n^{p+9}}{n^{18}+0}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{9-p}}<+\infty\,,\quad\text{gdyż}\quad 9-p>1\,.$$

Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg części reczywistych jest zbieżny.

W tym przypadku musimy jeszcze zbadać szereg części urojonych. W tym celu zapisujemy go w postaci różnicy dwóch szeregów o wyrazach dodatnich:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9-n^p}{n^{18}+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9}{n^{18}+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{n^{18}+1}\,,$$

a następnie szacujemy osobno odjemną i odjemnik:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9}{n^{18}+1}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9}{n^{18}+0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9}<+\infty\,,\quad\text{gdyż}\quad 7>1\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{n^{18}+1}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{n^{18}+0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{18-p}}<+\infty\,,\quad\text{gdyż}\quad 18-p>1\,.$$

Na mocy kryterium porównawczego obydwa powyższe szeregi są zbieżne.

Tak więc w tym przypadku dany w treści zadania szereg jest zbieżny.

**Odpowiedź:** Dany w treści zadania szereg jest zbieżny dla $p<8$, a rozbieżny dla $p\geqslant 8$.

**Uwaga.** Założenie dodatniości parametru $p$ jest całkowicie zbyteczne. Nie chciałem jednak, aby ktoś z Państwa skomplikował sobie życie roważając osobno przypadek $p$ ujemnego, bo nie to jest esencją zadania.

*Zadanie* **24.**

Obliczyć wartość całki

$$\int\limits_{3\pi}^{4\pi} \sin^3 x\cdot\sin 3x\,dx\,.$$

*Rozwiązanie:*

Niech $z=\cos x+i\sin x$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej $n$

$$z^n=\cos nx+i\sin nx$$

oraz

$$z^{-n}=\cos nx-i\sin nx\,,$$

co w konsekwencji daje

$$\cos nx=\frac{z^n+z^{-n}}{2}$$

i

$$\sin nx=\frac{z^n-z^{-n}}{2i}\,.$$

Zatem

$$\sin^3 x\cdot\sin 3x=\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^3\cdot\left(\frac{z^3-z^{-3}}{2i}\right)=\frac{(z^3-3z+3z^{-1}-z^{-3})\cdot(z^3-z^{-3})}{16}=$$

$$=\frac{z^6-3z^4+3z^2-2+3z^{-2}-3z^{-4}+z^{-6}}{16}=\frac{\cos 6x-3\cos 4x+3\cos 2x-1}{8}\,,$$

skąd

$$\int\limits_{3\pi}^{4\pi} \sin^3 x\cdot\sin 3x\,dx=\int\limits_{3\pi}^{4\pi}\frac{\cos 6x-3\cos 4x+3\cos 2x-1}{8}\,dx=$$

$$=\int\limits_{3\pi}^{4\pi}\frac{\cos 6x-3\cos 4x+3\cos 2x}{8}\,dx-\frac{\pi}{8}=\left(\frac{\sin 6x}{48}-\frac{3\sin 4x}{32}+\frac{3\sin 2x}{16}\right)\Bigg|_{x=3\pi}^{4\pi}-\frac{\pi}{8}=-\frac{\pi}{8}\,.$$

**Odpowiedź:** Dana w zadaniu całka ma wartość $-\pi/8$.