

ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski
KOŁOKWIUM nr **12**, zestaw **A**, 5.06.2007

Zadanie **23.**

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu (o wyrazach zespolonych)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p + i}{n^7 + i}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego p .

Rozwiązanie:

Rozkładamy dany w zadaniu szereg na część rzeczywistą i urojoną.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p + i}{n^7 + i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^p + i)(n^7 - i)}{(n^7 + i)(n^7 - i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p+7} + 1 + i(n^7 - n^p)}{n^{14} + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p+7} + 1}{n^{14} + 1} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7 - n^p}{n^{14} + 1}.$$

Dany w zadaniu szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie obydwie powyższe szeregi.

Dla $p \geq 6$ wykonujemy szacowanie od dołu szeregu części rzeczywistych.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p+7} + 1}{n^{14} + 1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p+7} + 0}{n^{14} + n^{14}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7-p}} = +\infty,$$

gdyż $7 - p \leq 1$. Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg części rzeczywistych jest rozbieżny, a co za tym idzie, rozbieżny jest szereg zespolony dany w treści zadania.

Dla $p < 6$ wykonujemy szacowanie od góry szeregu części rzeczywistych.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p+7} + 1}{n^{14} + 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p+7} + n^{p+7}}{n^{14} + 0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7-p}} < +\infty, \quad \text{gdyż } 7 - p > 1.$$

Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg części rzeczywistych jest zbieżny.

W tym przypadku musimy jeszcze zbadać szereg części urojonych. W tym celu zapisujemy go w postaci różnicy dwóch szeregów o wyrazach dodatnich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7 - n^p}{n^{14} + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{n^{14} + 1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^{14} + 1},$$

a następnie szacujemy osobno odjemną i odjemnik:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{n^{14} + 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{n^{14} + 0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7} < +\infty, \quad \text{gdyż } 7 > 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^{14} + 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^{14} + 0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{14-p}} < +\infty, \quad \text{gdyż } 14 - p > 1.$$

Na mocy kryterium porównawczego obydwie powyższe szeregi są zbieżne.

Tak więc w tym przypadku dany w treści zadania szereg jest zbieżny.

Odpowiedź: Dany w treści zadania szereg jest zbieżny dla $p < 6$, a rozbieżny dla $p \geq 6$.

Uwaga. Założenie dodatniości parametru p jest całkowicie zbędne. Nie chciałem jednak, aby ktoś z Państwa skomplikował sobie życie roważając osobno przypadek p ujemnego, bo nie to jest esencją zadania.

Zadanie 24.

Obliczyć wartość całki

$$\int_{5\pi}^{6\pi} \sin^3 x \cdot \sin 3x \, dx .$$

Rozwiązanie:

Niech $z = \cos x + i \sin x$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n

$$z^n = \cos nx + i \sin nx$$

oraz

$$z^{-n} = \cos nx - i \sin nx ,$$

co w konsekwencji daje

$$\cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}$$

i

$$\sin nx = \frac{z^n - z^{-n}}{2i} .$$

Zatem

$$\begin{aligned} \sin^3 x \cdot \sin 3x &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^3 \cdot \left(\frac{z^3 - z^{-3}}{2i} \right) = \frac{(z^3 - 3z + 3z^{-1} - z^{-3}) \cdot (z^3 - z^{-3})}{16} = \\ &= \frac{z^6 - 3z^4 + 3z^2 - 2 + 3z^{-2} - 3z^{-4} + z^{-6}}{16} = \frac{\cos 6x - 3\cos 4x + 3\cos 2x - 1}{8} , \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} \int_{5\pi}^{6\pi} \sin^3 x \cdot \sin 3x \, dx &= \int_{5\pi}^{6\pi} \frac{\cos 6x - 3\cos 4x + 3\cos 2x - 1}{8} \, dx = \\ &= \int_{5\pi}^{6\pi} \frac{\cos 6x - 3\cos 4x + 3\cos 2x}{8} \, dx - \frac{\pi}{8} = \left(\frac{\sin 6x}{48} - \frac{3\sin 4x}{32} + \frac{3\sin 2x}{16} \right) \Bigg|_{x=5\pi}^{6\pi} - \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{8} . \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $-\pi/8$.