

ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski
KOŁOKWIUM nr **11**, zestaw **A**, 29.05.2007

Zadanie **21.**

Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji

$$f(x) = \sin^4 x.$$

Rozwiązanie:

Niech $z = \cos x + i \sin x$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n

$$z^n = \cos nx + i \sin nx$$

oraz

$$z^{-n} = \cos nx - i \sin nx,$$

co w konsekwencji daje

$$\cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}$$

i

$$\sin nx = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^4 = \frac{z^4 - 4z^2 + 6 - 4z^{-2} + z^{-4}}{16} = \frac{z^4 + z^{-4}}{16} + \frac{-4z^2 - 4z^{-2}}{16} + \frac{6}{16} = \\ &= \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Szeregiem Fouriera funkcji f jest więc szereg

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie

$$a_0 = \frac{3}{8}, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{8},$$

a pozostałe współczynniki są zerami.

Zadanie 22.

W każdym z zadań **22.1-22.3** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

22.1 Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\int_0^2 \frac{\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx < 2$ **NIE**

b) $\int_8^9 \frac{\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx < 3$ **TAK**

c) $\int_{-3}^3 \frac{\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx < 5$ **NIE**

d) $\int_{10}^{15} \frac{\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx < 10$ **TAK**

22.2 Czy funkcja $f(x) = a \cdot |x| + b \cdot |x|^3 + c \cdot \operatorname{arctg}(x^2 + 1)$ jest różniczkowalna w zerze, jeżeli

a) $a=0, b=1, c=-1$ **TAK**

b) $a=-1, b=1, c=0$ **NIE**

c) $a=1, b=1, c=1$ **NIE**

d) $a=-1, b=1, c=1$ **NIE**

22.3 Czy podana całka niewłaściwa jest zbieżna

a) $\int_0^{\infty} \frac{2x^7+5}{x^8+3\sqrt{x}} dx$ **NIE**

b) $\int_0^{\infty} \frac{2x^7+5}{x^8+3x^2} dx$ **NIE**

c) $\int_0^{\infty} \frac{2x^7+5}{x^9+3\sqrt{x}} dx$ **TAK**

d) $\int_0^{\infty} \frac{2x^7+5}{x^9+3x^2} dx$ **NIE**

W zadaniu **22.4** udziel czterech odpowiedzi. Za każdą poprawną (niekoniecznie w najprostszej postaci) odpowiedź otrzymasz 1 punkt. Pięć punktów za zadanie **22.4** otrzymasz podając cztery poprawne i **uproszczone** odpowiedzi.

22.4 Podać wartość całki oznaczonej

a) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \ln 3$

b) $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \ln 2$

c) $\int_5^9 \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \ln 3$

d) $\int_{14}^{20} \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \ln 2$