ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 10, zestaw A, 22.05.2007

Zadanie **19.**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int\limits_{6}^{+\infty} \frac{4x-18}{x^3+x^2-6x}\,dx$$

lub uzasadnić, że jest rozbieżna.

W przypadku całki zbieżnej pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Szukamy rozkładu funkcji podcałkowej na ułamki proste:

$$\frac{4x-18}{x(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{D}{x-2}$$

$$4x-18 = A(x+3)(x-2) + Bx(x-2) + Dx(x+3) \tag{37}$$

Jeden ze sposobów wyznaczenia liczb A, B, D polega na wymnożeniu prawej strony równości (37) i ułożeniu trzech równań liniowych przez porównanie współczynników przy x^2, x oraz wyrazu wolnego po obu stronach równości.

W przypadku, gdy mianownik funkcji podcałkowej jest iloczynem różnych czynników liniowych, możemy zastosować metodę mniej uciążliwą rachunkowo.

Podstawiając za x w równości (37) kolejno liczby 0, -3, 2 otrzymujemy

$$-18 = -6A, \qquad -30 = 15B, \qquad -10 = 10D\,,$$

skąd

$$A = 3, \qquad B = -2, \qquad D = -1\,.$$

Zatem szukana całka przyjmuje postać

$$\int\limits_{6}^{+\infty} \frac{3}{x} - \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-2}\,dx = 3\ln|x| - 2\ln|x+3| - \ln|x-2| \Bigg|_{x=6}^{+\infty} =$$

$$= \ln|x|^3 - \ln|x+3|^2 - \ln|x-2| \Bigg|_{x=6}^{+\infty} = \ln\left|\frac{x^3}{(x+3)^2(x-2)}\right| \Bigg|_{x=6}^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\left|\frac{x^3}{(x+3)^2(x-2)}\right| - \ln\left|\frac{6^3}{9^2\cdot 4}\right| = \ln\left|\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x+3)^2(x-2)}\right| - \ln\frac{2^3\cdot 3^3}{3^4\cdot 2^2} =$$

$$= \ln\left|\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+3/x)^2(1-2/x)}\right| - \ln\frac{2}{3} = \ln 1 + \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{3}{2}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka niewłaściwa jest zbieżna i jej wartość jest równa $\ln\frac{3}{2}$.

Uwaga: Odpowiedź można podać także w postaci $\ln 3 - \ln 2$. Rzecz gustu, jednak biorąc pod uwagę sposób dojścia do odpowiedzi, w naturalny sposób pojawia się ona w postaci $\ln(3/2)$ i nie widać powodu, aby to dalej przekształcać.

Podanie odpowiedzi w postaci $-\ln\frac{2}{3}$ uważam za wielce nieestetyczne, aczkolwiek dojście do tej postaci wymaga wykonania istotnych w tym zadaniu uproszczeń. Jednak w podobnej sytuacji wybór między postacią $-\ln 2$ oraz $\ln(1/2)$ uznałbym za rzecz gustu - ja osobiście skłaniałbym się ku tej pierwszej formie.

Zadanie **20.**

Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ciągła na całej prostej, a ponadto ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego. Wiemy też, że

$$f(0)=0, \qquad f(2)=5, \qquad f(5)=9\,.$$

Dowieść, że istnieje taka liczba rzeczywista x, że $f'(x)$ jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika, że istnieje taka liczba $c\in(0,2)$, że

$$f'(c)=\frac{5-0}{2-0}=\frac{5}{2}$$

oraz istnieje taka liczba $d\in(2,5)$, że

$$f'(d)=\frac{9-5}{5-2}=\frac{4}{3}\,.$$

Z własności Darboux funkcji ciągłej f' wynika, że funkcja ta w przedziale (c,d) przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między $4/3$ i $5/2$, w szczególności przyjmuje wartość 2.

Uwaga: Założenie, że pochodna funckji f jest ciągła, jest zbędne, gdyż pochodna funkcji różniczkowalnej ma własność Darboux także wtedy, gdy nie jest ciągła. Założenie to umieściłem, ponieważ celem zadania nie było sprawdzenie znajomości tego faktu.