ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski
Egzamin 3.07.2007

Zadanie **1.**

W poniższym zadaniu udziel 14 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za udzielenie **n** poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\mathbf{max}(\mathbf{0},\mathbf{n}-\mathbf{9})$ **punktów**.

Czy dla dowolnej funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mającej ciągłą pochodną rzędu pierwszego i takiej, że $f(0)=0$, prawdziwa jest podana implikacja (zmienna x przebiega liczby rzeczywiste spełniające nierówność podaną pod kwantyfikatorem)

a) $\left(\forall_{x>0}\, f(x)>0\right)\Rightarrow\left(\forall_{x>0}\, f'(x)>0\right)$ **NIE**

b) $\left(\forall_{x>0}\, f'(x)>0\right)\Rightarrow\left(\forall_{x>0}\, f(x)>0\right)$ **TAK**

c) $\left(\forall_{x<0}\, f(x)>0\right)\Rightarrow\left(\forall_{x<0}\, f'(x)>0\right)$ **NIE**

d) $\left(\forall_{x<0}\, f(x)>0\right)\Rightarrow\left(\forall_{x<0}\, f'(x)<0\right)$ **NIE**

e) $\left(\forall_{x<0}\, f'(x)>0\right)\Rightarrow\left(\forall_{x<0}\, f(x)>0\right)$ **NIE**

f) $\left(\forall_{x<0}\, f'(x)>0\right)\Rightarrow\left(\forall_{x<0}\, f(x)<0\right)$ **TAK**

g) $\left(\forall_{x>0}\, f(x)\neq 0\right)\Rightarrow\left(\forall_{x>0}\, f'(x)\neq 0\right)$ **NIE**

h) $\left(\forall_{x>0}\, f'(x)\neq 0\right)\Rightarrow\left(\forall_{x>0}\, f(x)\neq 0\right)$ **TAK**

i) $\left(\forall_{x>0}\, f(x)=0\right)\Rightarrow\left(\forall_{x>0}\, f'(x)=0\right)$ **TAK**

j) $\left(\forall_{x>0}\, f'(x)=0\right)\Rightarrow\left(\forall_{x>0}\, f(x)=0\right)$ **TAK**

k) $\left(\exists_{x>0}\, f(x)=0\right)\Rightarrow\left(\exists_{x>0}\, f'(x)=0\right)$ **TAK**

l) $\left(\exists_{x>0}\, f'(x)=0\right)\Rightarrow\left(\exists_{x>0}\, f(x)=0\right)$ **NIE**

m) $\left(\exists_{x>0}\, f(x)>0\right)\Rightarrow\left(\exists_{x>0}\, f'(x)>0\right)$ **TAK**

n) $\left(\exists_{x>0}\, f'(x)>0\right)\Rightarrow\left(\exists_{x>0}\, f(x)>0\right)$ **NIE**

Zadanie **2.**

W każdym z zadań **1.1-1.3** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**, a w zadaniu **1.4** wstaw znaki w miejsce kropek.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**, a za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

1.1 Czy podany szereg liczbowy o wyrazach zespolonych jest zbieżny

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+i}{n^4+i}$ **NIE**

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^3 \cdot i}{n^4+i}$ **NIE**

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+i}{n^4+i}$ **TAK**

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2 \cdot i}{n^4+i}$ **TAK**

1.2 Czy funkcja $f(x)=a \cdot |x|+b \cdot \sin|x|+c \cdot \cos|x|$ jest różniczkowalna w zerze, jeżeli

a) $a=1,\ b=1,\ c=1$ **NIE**

b) $a=-1,\ b=1,\ c=1$ **TAK**

c) $a=1,\ b=-1,\ c=1$ **TAK**

d) $a=1,\ b=1,\ c=-1$ **NIE**

1.3 Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\int\limits_2^4 2^x \, dx > 10$ **TAK**

b) $\int\limits_{-10}^0 2^x \, dx > 10$ **NIE**

c) $\int\limits_0^2 2^x \, dx > 10$ **NIE**

d) $\int\limits_4^5 2^x \, dx > 10$ **TAK**

1.4 Wstaw jeden ze znaków ">", "<", "="

a) $\int\limits_{-1}^1 x^2 \cdot \sqrt{x^8+1} \, dx > 0$

b) $\int\limits_{-2}^1 x^3 \cdot \sqrt{x^8+1} \, dx < 0$

c) $\int\limits_{-1}^2 x^5 \cdot \sqrt{x^8+1} \, dx > 0$

d) $\int\limits_{-2}^2 x^7 \cdot \sqrt{x^8+1} \, dx = 0$

Zadanie **3.**

Obliczyć wartość całki

$$\int\limits_0^{\pi/3} \cos^5 x\, dx\,.$$

Rozwiązanie:

Niech $z=\cos x+i\sin x$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n

$$z^n=\cos nx+i\sin nx$$

oraz

$$z^{-n}=\cos nx-i\sin nx\,,$$

co w konsekwencji daje

$$\cos nx=\frac{z^n+z^{-n}}{2}\,.$$

Zatem

$$\cos^5 x=\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^5=\frac{(z^5+5z^3+10z+10z^{-1}+5z^{-3}+z^{-5})}{2\cdot 16}=\frac{\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x}{16}\,,$$

skąd

$$\int\limits_0^{\pi/3} \cos^5 x\, dx=\int\limits_0^{\pi/3} \frac{\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x}{16}\, dx=\left(\frac{\sin 5x}{80}+\frac{5\sin 3x}{48}+\frac{5\sin x}{8}\right)\Bigg|_{x=0}^{\pi/3}=$$

$$=\frac{\sin(5\pi/3)}{80}+\frac{5\sin\pi}{48}+\frac{5\sin(\pi/3)}{8}-\frac{\sin 0}{80}-\frac{5\sin 0}{48}-\frac{5\sin 0}{8}=-\frac{\sqrt{3}/2}{80}+\frac{5\sqrt{3}/2}{8}=\frac{49\sqrt{3}}{160}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $49\sqrt{3}/160$.

Zadanie **4.**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{e^x+1}{e^{3x}+e^x}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $y=e^x$, czyli $x=\ln y$, co daje formalny wzór $dx=dy/y$, otrzymujemy

$$\int \frac{e^x+1}{e^{3x}+e^x}\,dx=\int \frac{y+1}{y^4+y^2}\,dy\,.$$

Szukamy rozkładu funkcji podcałkowej (wymiernej) na ułamki proste.

$$\frac{y+1}{(y^2+1)y^2}=\frac{Ay+B}{y^2+1}+\frac{D}{y}+\frac{E}{y^2}$$

$$y+1=Ay^3+By^2+Dy^3+Dy+Ey^2+E\,,$$

co prowadzi do układu równań

$$0=A+D$$

$$0=B+E$$

$$1=D$$

$$1=E$$

mającego rozwiązanie $A=B=-1$, $D=E=1$.

Zatem dana w zadaniu całka przyjmuje postać

$$-\int \frac{y}{y^2+1}\,dy-\int \frac{1}{y^2+1}\,dy+\int \frac{1}{y^2}\,dy+\int \frac{1}{y}\,dy=-\frac{\ln\left(y^2+1\right)}{2}-\mathrm{arctg}\,y-\frac{1}{y}+\ln|y|+C=$$
$$=-\frac{\ln\left(e^{2x}+1\right)}{2}-\mathrm{arctg}\,e^x-\frac{1}{e^x}+\ln|e^x|+C=-\frac{\ln\left(e^{2x}+1\right)}{2}-\mathrm{arctg}\,e^x-e^{-x}+x+C\,.$$

Odpowiedź:

$$\int \frac{e^x+1}{e^{3x}+e^x}\,dx=-\frac{\ln\left(e^{2x}+1\right)}{2}-\mathrm{arctg}\,e^x-e^{-x}+x+C\,.$$

Zadanie **5.**

Znaleźć największą liczbę całkowitą dodatnią n, dla której istnieje taka liczba rzeczywista A, że funkcja

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}-1+\ln(x+1)}{x^n} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'(0)$ dla tych wartości n i A.

Rozwiązanie:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{-h}-1+\ln(h+1)}{h^n}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-h}-1+\ln(h+1)-Ah^n}{h^{n+1}}\,.$$

Przy $h\to 0$ mianownik w ostatniej granicy dąży do 0. Wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$ otrzymujemy, gdy $A=n=0$ lub $n>0$ i tylko wtedy możemy zastosować regułę de l'Hospitala. Ponieważ mamy zmaksymalizować n, zakładamy, że $n>0$. Po zastosowaniu reguły de l'Hospitala otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{-e^{-h}+(h+1)^{-1}-Anh^{n-1}}{(n+1)h^n}\,.$$

Przy $h\to 0$ mianownik w ostatniej granicy dąży do 0. Wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$ otrzymujemy, gdy $A=n-1=0$ lub $n-1>0$ i tylko wtedy możemy zastosować po raz drugi regułę de l'Hospitala. Ponieważ mamy zmaksymalizować n, zakładamy, że $n>1$. Po zastosowaniu reguły de l'Hospitala otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-h}-(h+1)^{-2}-An(n-1)h^{n-2}}{(n+1)nh^{n-1}}\,.$$

Przy $h\to 0$ mianownik w ostatniej granicy dąży do 0. Wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$ otrzymujemy, gdy $A=n-2=0$ lub $n-2>0$ i tylko wtedy możemy zastosować po raz trzeci regułę de l'Hospitala. Ponieważ mamy zmaksymalizować n, zakładamy, że $n>2$. Po zastosowaniu reguły de l'Hospitala otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{-e^{-h}+2(h+1)^{-3}-An(n-1)(n-2)h^{n-3}}{(n+1)n(n-1)h^{n-2}}\,.$$

Przy $h\to 0$ mianownik w ostatniej granicy dąży do 0. Wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$ otrzymujemy, gdy $n=3$ oraz $-1+2-6A=0$ i tylko wtedy możemy zastosować po raz czwarty regułę de l'Hospitala. Po wstawieniu $n=3$, $A=1/6$ i zastosowaniu reguły de l'Hospitala otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{-e^{-h}+2(h+1)^{-3}-1}{24h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-h}-6(h+1)^{-4}}{24}=\frac{1-6}{24}=-\frac{5}{24}\,.$$

Odpowiedź: Największą wartością n, dla której dana w zadaniu funkcja jest różniczkowalna w zerze, jest $n=3$. Wówczas $A=1/6$ i $f'(0)=-5/24$.

Zadanie **6.**

Wyznaczyć kresy zbioru

$$A = \left\{ \int\limits_0^a x^2 - a\,dx \; : \; a \in (0,3) \right\}$$

i określić, czy należą one do zbioru A.

Rozwiązanie:

Niech

$$f(a) = \int\limits_0^a x^2 - a\,dx\,.$$

Zadanie polega na wyznaczeniu kresów funkcji f na przedziale (0,3).

Po obliczeniu całki definiującej funkcję f otrzymujemy

$$f(a) = \left(\frac{x^3}{3} - ax \right) \Bigg|_{x=0}^{a} = \frac{a^3}{3} - a^2\,.$$

Zauważmy, że $f(0) = f(3) = 0$, czyli

$$\lim_{a \to 0^+} f(a) = \lim_{a \to 3^-} f(a) = 0\,.$$

Ponadto

$$f'(a) = a^2 - 2a = a(a-2)\,,$$

skąd wynika, że pochodna funkcji f ma w przedziale (0,3) miejsce zerowe tylko w $a = 2$.

Przy tym $f(2) = -4/3$.

Odpowiedź:

Kresem górnym zbioru A jest liczba 0 i nie należy ona do zbioru A.

Kresem dolnym zbioru A jest liczba $-4/3$ i należy ona do zbioru A.

Zadanie **7.**

Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego na całej prostej. Wiadomo, że $f(0)=0$, $f(7)=12$, a ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$1<f'(x)<2\,.$$

Dowieść, że wówczas zachodzi nierówność

$$|f(4)-.........|<1\,.$$

W miejsce kropek należy wpisać **konkretną** liczbę rzeczywistą (niezależną od f !!!).

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a wynika istnienie takiej liczby $c\in(0,4)$, że

$$f(4)=f(0)+(4-0)f'(c)=4f'(c)\,,$$

skąd wobec nierówności

$$1<f'(c)<2$$

otrzymujemy

$$4<f(4)<8\,.$$

Z twierdzenia Lagrange'a wynika ponadto istnienie takiej liczby $d\in(4,7)$, że

$$f(4)=f(7)+(4-7)f'(d)=12-3f'(d)\,,$$

skąd wobec nierówności

$$1<f'(d)<2$$

otrzymujemy

$$6<f(4)<9\,.$$

Zatem $f(4)\in(6,8)$, czyli

$$|f(4)-7|<1\,.$$

Zadanie **8.**

Rozstrzygnąć zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{x^p+1}{\sqrt{x^5+x}}\,dx$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego p.

Rozwiązanie:

Rozdzielamy przedział całkowania

$$\int_0^\infty \frac{x^p+1}{\sqrt{x^5+x}}\,dx=\int_0^1 \frac{x^p+1}{\sqrt{x^5+x}}\,dx+\int_1^\infty \frac{x^p+1}{\sqrt{x^5+x}}\,dx$$

i próbujemy oszacować każdą z powstałych całek z osobna.

$$\int_0^1 \frac{x^p+1}{\sqrt{x^5+x}}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1+1}{\sqrt{0+x}}\,dx=2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx<+\infty\,,$$

zatem na mocy kryterium porównawczego całka $\int_0^1 \frac{x^p+1}{\sqrt{x^5+x}}\,dx$ jest zbieżna dla każdego $p>0$.

$$\int_1^\infty \frac{x^p+1}{\sqrt{x^5+x}}\,dx \leqslant \int_1^\infty \frac{x^p+x^p}{\sqrt{x^5+0}}\,dx=2\int_1^\infty x^{p-5/2}\,dx\,,$$

zatem na mocy kryterium porównawczego całka $\int_1^\infty \frac{x^p+1}{\sqrt{x^5+x}}\,dx$ jest zbieżna, gdy $p-5/2<-1$, czyli $p<3/2$.

Uwaga. W tym momencie możemy tylko stwierdzić, że dla $p\geqslant 3/2$ nie udało nam się udowodnić zbieżności całki, nie możemy jednak twierdzić, że w tym przypadku całka jest rozbieżna.

$$\int_1^\infty \frac{x^p+1}{\sqrt{x^5+x}}\,dx \geqslant \int_1^\infty \frac{x^p+0}{\sqrt{x^5+x^5}}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^\infty x^{p-5/2}\,dx\,,$$

zatem na mocy kryterium porównawczego całka $\int_1^\infty \frac{x^p+1}{\sqrt{x^5+x}}\,dx$ jest rozbieżna, gdy $p-5/2\geqslant -1$, czyli $p\geqslant 3/2$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka jest zbieżna dla $p\in(0{,}3/2)$ i rozbieżna dla $p\geqslant 3/2$.