ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski
Egzamin 14.09.2007

Zadanie **1.**

Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego na całej prostej. Wiadomo, że $f(0)=0$, $f(5)=9$, a ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$f'(x)\neq 3\,.$$

Dowieść, że wówczas zachodzi nierówność

$$|f(3)-.........|<3\,.$$

W miejsce kropek należy wpisać **konkretną** liczbę rzeczywistą (niezależną od f !!!).

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja f' jest ciągła, ma ona własność Darboux (w rzeczywistości założenie ciągłości f' nie jest potrzebne, gdyż pochodna funkcji różniczkowalnej ma własność Darboux nawet wtedy, gdy nie jest ciągła). Ponieważ f' nie przyjmuje wartości 3, musi albo przyjmować tylko wartości większe od 3, albo tylko mniejsze od 3. Na mocy twierdzenia Lagrange'a istnieje takie $b\in(0,5)$, że

$$f'(b)=\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{9}{5}<3\,,$$

skąd wynika, ze dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$f'(x)<3\,.$$

Z twierdzenia Lagrange'a wynika istnienie takiej liczby $c\in(0,3)$, że

$$f(3)=f(0)+(3-0)f'(c)=3f'(c)\,,$$

skąd wobec nierówności

$$f'(c)<3$$

otrzymujemy

$$f(3)<9\,.$$

Z twierdzenia Lagrange'a wynika ponadto istnienie takiej liczby $d\in(3,5)$, że

$$f(3)=f(5)+(3-5)f'(d)=9-2f'(d)\,,$$

skąd wobec nierówności

$$f'(d)<3$$

otrzymujemy

$$f(3)>3\,.$$

Zatem $f(3)\in(3,9)$, czyli

$$|f(3)-6|<3\,.$$

Zadanie **2.**

W każdym z zadań **2.1-2.2** udziel **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz wszystkie poprawne odpowiedzi, otrzymasz 2 punkty.
Gdy w zadaniu braknie ci do kompletu 1 poprawnej odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za poprawne rozwiązanie obu zadań otrzymasz **5 punktów**.

2.1 Czy podana całka niewłaściwa jest zbieżna

a) $\int\limits_1^\infty \frac{x+1}{x^2+2}\,dx$ **NIE**

b) $\int\limits_1^\infty \frac{x+1}{x^3+2}\,dx$ **TAK**

c) $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$ **TAK**

d) $\int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$ **TAK**

e) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^3+\sqrt{x}}\,dx$ **NIE**

f) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+\sqrt{x}}\,dx$ **TAK**

g) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+x}\,dx$ **NIE**

2.2 Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\log_2 x} < 1$ **NIE**

b) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\log_2 x} < 2$ **TAK**

c) $\int\limits_4^8 \frac{dx}{\log_2 x} < 2$ **TAK**

d) $\int\limits_4^8 \frac{dx}{\log_2 x} < 3$ **TAK**

e) $\int\limits_{20}^{30} \frac{dx}{\log_2 x} < 3$ **TAK**

f) $\int\limits_{20}^{30} \frac{dx}{\log_2 x} < 4$ **TAK**

g) $\int\limits_{33}^{63} \frac{dx}{\log_2 x} < 4$ **NIE**

h) $\int\limits_{33}^{63} \frac{dx}{\log_2 x} < 5$ **NIE**

Zadanie **3.**

Obliczyć wartość całki

$$\int_2^6 \frac{2x-7}{4x^2+17x+4}\,dx\,.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Mianownik funkcji podcałkowej rozkłada się na iloczyn czynników liniowych

$$4x^2+17x+4=(x+4)(4x+1)\,.$$

Szukamy więc przedstawienia funkcji podcałkowej w postaci sumy ułamków prostych:

$$\frac{2x-7}{(x+4)(4x+1)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{4x+1}$$

$$2x-7=4Ax+A+Bx+4B$$

$$2=4A+B \qquad -7=A+4B$$

$$A=1 \qquad B=-2$$

Zatem

$$\int_2^6 \frac{2x-7}{4x^2+17x+4}\,dx=\int_2^6 \frac{1}{x+4}-\frac{2}{4x+1}\,dx=\left(\ln|x+4|-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\ln|4x+1|\right)\Bigg|_{x=2}^{6}=$$

$$=\ln 10-\frac{1}{2}\ln 25-\ln 6+\frac{1}{2}\ln 9=\ln 2+\ln 5-\ln 5-\ln 2-\ln 3+\ln 3=0\,.$$

Odpowiedź: Podana w zadaniu całka ma wartość 0.

Zadanie **4.**

Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2i)^n z^{2n}}{\sqrt{n}} \,.$$

Rozwiązanie:

Stosując kryterium d'Alemberta otrzymujemy

$$\left| \frac{(-2i)^{n+1} z^{2n+2}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(-2i)^n z^{2n}} \right| = 2 \cdot |z|^2 \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} \to 2|z|^2 \,.$$

Szereg jest więc zbieżny, gdy $2|z|^2 < 1$, czyli $|z| < 1/\sqrt{2}$, a rozbieżny, gdy $2|z|^2 > 1$, czyli $|z| > 1/\sqrt{2}$.

Pozostaje rozstrzygnięcie przypadku $|z| = 1/\sqrt{2}$. W tym przypadku szereg potęgowy przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2iz^2)^n}{\sqrt{n}} \,,$$

gdzie $|-2iz^2| = 1$. Jeżeli $-2iz^2 = 1$, to szereg sprowadza się do

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \,,$$

jest więc rozbieżny.

Natomiast w przypadku, gdy $\omega = -2iz^2$ jest liczbą o module 1, ale różną od 1, szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny na mocy uogólnienia twierdzenia o szeregach naprzemiennych, gdyż ciąg $(1/\sqrt{n})$ malejąco dąży do zera.

Pozostaje do rozwiązania równanie

$$-2iz^2 = 1 \,,$$

czyli

$$z^2 = 1/(-2i) = i/2 \,.$$

Liczba $i/2$ ma moduł $1/2$ oraz argument $\pi/2$, skąd

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right) = \pm \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) .$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg jest zbieżny w kole o środku w zerze i promieniu $1/\sqrt{2}$ oraz na okręgu ograniczającym to koło, za wyjątkiem punktów $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ oraz $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$.

Zadanie **5.**

Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+(n+1)^2}+\frac{n}{3n^2+(n+2)^2}+\frac{n}{3n^2+(n+3)^2}+\frac{n}{3n^2+(n+4)^2}+\ldots+\frac{n}{12n^2}\right).$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Przepisujemy daną w terści zadania granicę w postaci

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{n}{3n^2+(n+k)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{3+(1+k/n)^2}=\int_0^2\frac{dx}{3+(1+x)^2}.$$

Wykonanie podstawienia $y=1+x$, gdzie formalnie $dx=dy$, prowadzi do całki

$$\int_1^3\frac{dy}{3+y^2}=\int_1^3\frac{dy}{3+3\left(y/\sqrt{3}\right)^2}.$$

Wykonanie podstawienia $z=y/\sqrt{3}$, gdzie formalnie $dy=\sqrt{3}dz$, prowadzi do całki

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}z\Bigg|_{z=1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Inna naturalna postać wyniku to $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

Zadanie **6.**

Obliczyć całkę

$$\int x^p \cdot e^{x^\pi}\,dx$$

dla odpowiednio dobranej wartości parametru rzeczywistego $p \in [3,8]$.

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $y = x^\pi$, któremu towarzyszy formalna zależność $dy = \pi x^{\pi-1}dx$, otrzymujemy całkę

$$\frac{1}{\pi}\int y^{(p-\pi+1)/\pi} \cdot e^y\,dy\,.$$

Staramy się dobrać wartość parametru p tak, aby wykładnik $(p-\pi+1)/\pi$ był liczbą całkowitą nieujemną. W tym celu szukamy p postaci $k\pi-1$, gdzie k jest całkowite. Ponieważ $\pi-1<3$ oraz $3\pi-1>9-1=8$, jedynie dla $k=2$ wartość parametru p znajdzie się w określonym warunkami zadania przedziale $[3,8]$.

Zatem $p=2\pi-1$. Całkując ostatnią całkę przez części otrzymujemy

$$\frac{1}{\pi}\int y\cdot e^y\,dy = \frac{1}{\pi}\left(y\cdot e^y - \int e^y\,dy\right) = \frac{1}{\pi}(y\cdot e^y - e^y) + C = \frac{1}{\pi}\left(x^\pi \cdot e^{x^\pi} - e^{x^\pi}\right) + C\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka wynosi $\frac{1}{\pi}\left(x^\pi \cdot e^{x^\pi} - e^{x^\pi}\right) + C$.

Inna naturalna postać wyniku to $\frac{1}{\pi}(x^\pi - 1)e^{x^\pi} + C$.

Zadanie **7.**

Znaleźć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{5x}-e^{3x}-2x}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej funkcji otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{5h}-e^{3h}-2h}{h^2}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{5h}-e^{3h}-2h-Ah^2}{h^3}\,.$$

Przy h dążącym do 0 iloraz pod znakiem granicy przyjmuje postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala. Otrzymujemy

$$\lim_{h\to 0}\frac{5e^{5h}-3e^{3h}-2-2Ah}{3h^2}\,.$$

Przy h dążącym do 0 iloraz pod znakiem granicy przyjmuje postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala. Otrzymujemy

$$\lim_{h\to 0}\frac{25e^{5h}-9e^{3h}-2A}{6h}\,.$$

Przy h dążącym do 0 iloraz pod znakiem granicy przyjmuje postać nieoznaczoną $\frac{16-2A}{0}$. Zatem dla $A\neq 8$ obliczana granica nie istnieje (a dokładniej jest $\pm\infty$), więc funkcja f nie jest różniczkowalna w zerze. Natomiast dla $A=8$ możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala. Otrzymujemy

$$\lim_{h\to 0}\frac{125e^{5h}-27e^{3h}}{6}=\frac{98}{6}=\frac{49}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna w zerze dla $A=8$ i wówczas $f'(0)=49/3$.

Zadanie **8.**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$$

na przedziale $[0,4]$. Podać punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną funkcji

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2+1}\,.$$

Rozwiązujemy równanie $f'(x) = 0$:

$$1 - \frac{2}{x^2+1} = 0$$
$$\frac{2}{x^2+1} = 1$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

Ponieważ interesują nas tylko miejsca zerowe pochodnej należące do przedziału $(0,4)$, odrzucamy $x = -1$.

Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscu zerowym pochodnej:

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = 1 - 2\operatorname{arctg} 1 = 1 - 2\cdot\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$
$$f(4) = 4 - 2\operatorname{arctg} 4 > 4 - 2\cdot\frac{\pi}{2} = 4 - \pi > 0$$

W oszacowaniu $f(4)$ wykorzystaliśmy nierówność $\operatorname{arctg} 4 < \pi/2$.

Odpowiedź: Na przedziale $[0,4]$ funkcja f osiąga najmniejsza wartość równą $1 - \pi/2$ w punkcie 1, a największą wartość równą $4 - 2\operatorname{arctg} 4$ w punkcie 4.