

ANALIZA 1A Wykład: J. Wróblewski  
KOŁOKWIUM nr **2**, zestaw **B**, 24.10.2006

**Zadanie 3.**

Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej  $n$  zachodzi równość

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{37} + \frac{4}{6^4+1} + \frac{8}{6^8+1} + \frac{16}{6^{16}+1} + \dots + \frac{2^n}{6^{2^n}+1} = \frac{1}{5} - \frac{2^{n+1}}{6^{2^{n+1}}-1}. \quad (*)$$

*Rozwiązanie:*

1° Dla  $n=0$  dana w zadaniu równość przyjmuje postać

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{5} - \frac{2^1}{6^{2^1}-1}.$$

Lewa strona równości jest równa  $1/7$ , natomiast prawa ma wartość

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{6^2-1} = \frac{1}{5} - \frac{2}{35} = \frac{7-2}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.$$

Dowodzona równość została więc sprawdzona dla  $n=0$ .

2° Niech teraz  $n$  będzie liczbą całkowitą nieujemną, dla której zachodzi (\*).

Wykażemy, że wówczas

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{37} + \frac{4}{6^4+1} + \frac{8}{6^8+1} + \frac{16}{6^{16}+1} + \dots + \frac{2^n}{6^{2^n}+1} + \frac{2^{n+1}}{6^{2^{n+1}}+1} = \frac{1}{5} - \frac{2^{n+2}}{6^{2^{n+2}}-1}. \quad (**)$$

Korzystając z równości (\*) zapisujemy lewą stronę równości (\*\*) w postaci

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} - \frac{2^{n+1}}{6^{2^{n+1}}-1} + \frac{2^{n+1}}{6^{2^{n+1}}+1} &= \frac{1}{5} + \frac{-2^{n+1}(6^{2^{n+1}}+1) + 2^{n+1}(6^{2^{n+1}}-1)}{(6^{2^{n+1}}-1)(6^{2^{n+1}}+1)} = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{-2^{n+1} \cdot 6^{2^{n+1}} - 2^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 6^{2^{n+1}} - 2^{n+1}}{(6^{2^{n+1}})^2 - 1} = \frac{1}{5} + \frac{-2 \cdot 2^{n+1}}{6^{2 \cdot 2^{n+1}} - 1} = \frac{1}{5} - \frac{2^{n+2}}{6^{2^{n+2}} - 1}, \end{aligned}$$

co jest równe prawej stronie równości (\*\*).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej równość (\*) jest prawdziwa dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej  $n$ .

#### Zadanie 4.

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

#### Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

4.1 Czy prawdziwa jest równość

a)  $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$  **TAK**

b)  $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt{3}-2$  **NIE**

c)  $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = \sqrt{5}-2$  **TAK**

d)  $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = 2-\sqrt{5}$  **NIE**

4.2 O zdaniu  $T(n)$  wiadomo, że prawdziwe jest  $T(1)$ , a ponadto dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzi implikacja  $T(n) \Rightarrow T(n+10)$ . Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

a)  $T(54) \Rightarrow T(94)$  **TAK**

b)  $T(52) \Rightarrow T(93)$  **NIE**

c)  $T(53) \Rightarrow T(91)$  **TAK**

d)  $T(51) \Rightarrow T(92)$  **NIE**

4.3 Czy równość  $\binom{n}{k+1} = 2 \cdot \binom{n}{k}$  jest prawdziwa dla

a)  $n=17, k=5$  **TAK**

b)  $n=18, k=6$  **NIE**

c)  $n=19, k=7$  **NIE**

d)  $n=20, k=6$  **TAK**

4.4 Czy liczba  $\frac{(n+2)!}{n!}$  jest podzielna przez 12 dla

a)  $n=30$  **NIE**

b)  $n=31$  **TAK**

c)  $n=32$  **NIE**

d)  $n=33$  **NIE**