

ANALIZA 1A Wykład: J. Wróblewski
KOŁOKWIUM nr 2, zestaw A, 24.10.2006

Zadanie 3.

Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej n zachodzi równość

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{17} + \frac{4}{4^4+1} + \frac{8}{4^8+1} + \frac{16}{4^{16}+1} + \dots + \frac{2^n}{4^{2^n}+1} = \frac{1}{3} - \frac{2^{n+1}}{4^{2^{n+1}}-1}. \quad (*)$$

Rozwiązanie:

1° Dla $n=0$ dana w zadaniu równość przyjmuje postać

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{2^1}{4^{2^1}-1}.$$

Lewa strona równości jest równa $1/5$, natomiast prawa ma wartość

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{4^2-1} = \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{5-2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Dowodzona równość została więc sprawdzona dla $n=0$.

2° Niech teraz n będzie liczbą całkowitą nieujemną, dla której zachodzi (*).

Wykażemy, że wówczas

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{17} + \frac{4}{4^4+1} + \frac{8}{4^8+1} + \frac{16}{4^{16}+1} + \dots + \frac{2^n}{4^{2^n}+1} + \frac{2^{n+1}}{4^{2^{n+1}}+1} = \frac{1}{3} - \frac{2^{n+2}}{4^{2^{n+2}}-1}. \quad (**)$$

Korzystając z równości (*) zapisujemy lewą stronę równości (**) w postaci

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{2^{n+1}}{4^{2^{n+1}}-1} + \frac{2^{n+1}}{4^{2^{n+1}}+1} &= \frac{1}{3} + \frac{-2^{n+1}(4^{2^{n+1}}+1) + 2^{n+1}(4^{2^{n+1}}-1)}{(4^{2^{n+1}}-1)(4^{2^{n+1}}+1)} = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{-2^{n+1} \cdot 4^{2^{n+1}} - 2^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 4^{2^{n+1}} - 2^{n+1}}{(4^{2^{n+1}})^2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{-2 \cdot 2^{n+1}}{4^{2 \cdot 2^{n+1}} - 1} = \frac{1}{3} - \frac{2^{n+2}}{4^{2^{n+2}} - 1}, \end{aligned}$$

co jest równe prawej stronie równości (**).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej równość (*) jest prawdziwa dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej n .

Zadanie 4.

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

4.1 Czy prawdziwa jest równość

a) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$ **TAK**

b) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 1-\sqrt{2}$ **NIE**

c) $\sqrt{(3-\sqrt{8})^2} = 3-\sqrt{8}$ **TAK**

d) $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2} = \sqrt{8}-3$ **NIE**

4.2 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+10)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(53) \Rightarrow T(93)$ **TAK**

b) $T(52) \Rightarrow T(91)$ **TAK**

c) $T(54) \Rightarrow T(92)$ **NIE**

d) $T(51) \Rightarrow T(94)$ **NIE**

4.3 Czy równość $\binom{n}{k+1} = 2 \cdot \binom{n}{k}$ jest prawdziwa dla

a) $n=20, k=6$ **TAK**

b) $n=21, k=6$ **NIE**

c) $n=22, k=7$ **NIE**

d) $n=23, k=7$ **TAK**

4.4 Czy liczba $\frac{(n+2)!}{n!}$ jest podzielna przez 12 dla

a) $n=41$ **NIE**

b) $n=42$ **NIE**

c) $n=43$ **TAK**

d) $n=44$ **NIE**