**ANALIZA A2** Wykład: J. Wróblewski

**KOLOKWIUM nr 9, zestaw B, 15.05.2007**

*Zadanie* **17.**

Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^5+3x^3+5}{x^7+4x^4+7\sqrt[7]{x}}\,dx\,.$$

*Rozwiązanie:*

Rozdzielamy przedział całkowania na dwie części punktem 1.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^5+3x^3+5}{x^7+4x^4+7\sqrt[7]{x}}\,dx = \int_0^{1} \frac{x^5+3x^3+5}{x^7+4x^4+7\sqrt[7]{x}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^5+3x^3+5}{x^7+4x^4+7\sqrt[7]{x}}\,dx\,.$$

Dana w zadaniu całka jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy obie całki po prawej stronie powyższej równości są zbieżne.

Korzystamy z kryterium porównawczego wykonując inne oszacowanie dla każdej z całek.

$$\int_0^{1} \frac{x^5+3x^3+5}{x^7+4x^4+7\sqrt[7]{x}}\,dx \leqslant \int_0^{1} \frac{1+3+5}{0+0+7\sqrt[7]{x}}\,dx = \frac{9}{7}\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[7]{x}}\,dx = \frac{9}{7}\int_0^{1} \frac{1}{x^{1/7}}\,dx < +\infty\,,$$

gdyż $1/7 < 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^5+3x^3+5}{x^7+4x^4+7\sqrt[7]{x}}\,dx \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{x^5+3x^5+5x^5}{x^7+0+0}\,dx = 9\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty\,,$$

gdyż $2 > 1$.

Zatem obydwie całki są zbieżne, a co za tym idzie, zbieżna jest także całka dana w treści zadania.

*Zadanie* **18.**

Funkcja $g:(-9,+\infty)$ zdefiniowana jest wzorem

$$g(x)=\int\limits_0^x \ln\left(\frac{(t+9)^5}{(t+27)^3}\right)dt\,.$$

Funkcja $f:(-9,+\infty)$ zdefiniowana jest wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & \text{dla}\quad x\neq 0\\ A & \text{dla}\quad x=0\end{cases}.$$

Dobrać $A$ tak, aby funkcja $f$ była różniczkowalna w zerze oraz obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru $A$.

*Rozwiązanie:*

Z definicji funkcji $g$ wynika, że $g(0)=0$ oraz

$$g'(x)=\ln\left(\frac{(x+9)^5}{(x+27)^3}\right)$$

dla $x>-9$. Odnotujmy, że w przedziale $(-9,+\infty)$ funkcja $g$ jest ciągła i różniczkowalna dowolnie wiele razy i ma ciągłe pochodne.

Przystępujemy do obliczania pochodnej funkcji $f$ w zerze.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(h)}{h}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-Ah}{h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(h)-A}{2h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{g'(0)-A}{0}$. Zatem przy $A\neq g'(0)$ pochodna nie istnieje, a przy $A=g'(0)$ możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g''(h)}{2}=\frac{g''(0)}{2}\,.$$

Do udzielenia odpowiedzi potrzebna jest nam tylko znajomość $g'(0)$ oraz $g''(0)$.

Obliczamy

$$g'(0)=\ln\left(\frac{9^5}{27^3}\right)=\ln 3^{10-9}=\ln 3\,.$$

Ponadto funkcja $g''$ wyraża się wzorem

$$g''(x)=\frac{d}{dx}\left(5\ln(x+9)-3\ln(x+27)\right)=\frac{5}{x+9}-\frac{3}{x+27}\,,$$

skąd $g''(0)=5/9-3/27=4/9$ i w konsekwencji $f'(0)=\frac{g''(0)}{2}=2/9$.

**Odpowiedź:** Funkcja jest różniczkowalna tylko dla $A=\ln 3$ i wówczas $f'(0)=2/9$.