ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 9, zestaw A, 15.05.2007

Zadanie **17.**

Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^7+4x^4+7}{x^9+5x^5+9\sqrt[9]{x}}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Rozdzielamy przedział całkowania na dwie części punktem 1.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^7+4x^4+7}{x^9+5x^5+9\sqrt[9]{x}}\,dx = \int_0^{1} \frac{x^7+4x^4+7}{x^9+5x^5+9\sqrt[9]{x}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^7+4x^4+7}{x^9+5x^5+9\sqrt[9]{x}}\,dx\,.$$

Dana w zadaniu całka jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy obie całki po prawej stronie powyższej równości są zbieżne.

Korzystamy z kryterium porównawczego wykonując inne oszacowanie dla każdej z całek.

$$\int_0^{1} \frac{x^7+4x^4+7}{x^9+5x^5+9\sqrt[9]{x}}\,dx \leqslant \int_0^{1} \frac{1+4+7}{0+0+9\sqrt[9]{x}}\,dx = \frac{4}{3}\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[9]{x}}\,dx = \frac{4}{3}\int_0^{1} \frac{1}{x^{1/9}}\,dx < +\infty\,,$$

gdyż $1/9 < 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^7+4x^4+7}{x^9+5x^5+9\sqrt[9]{x}}\,dx \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{x^7+4x^7+7x^7}{x^9+0+0}\,dx = 12\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty\,,$$

gdyż $2 > 1$.

Zatem obydwie całki są zbieżne, a co za tym idzie, zbieżna jest także całka dana w treści zadania.

Zadanie **18.**

Funkcja $g:(-8,+\infty)$ zdefiniowana jest wzorem

$$g(x)=\int_0^x \ln\left(\frac{(t+8)^3}{(t+16)^2}\right)dt\,.$$

Funkcja $f:(-8,+\infty)$ zdefiniowana jest wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}\,.$$

Dobrać A tak, aby funkcja f była różniczkowalna w zerze oraz obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Z definicji funkcji g wynika, że $g(0)=0$ oraz

$$g'(x)=\ln\left(\frac{(x+8)^3}{(x+16)^2}\right)$$

dla $x>-8$. Odnotujmy, że w przedziale $(-8,+\infty)$ funkcja g jest ciągła i różniczkowalna dowolnie wiele razy i ma ciągłe pochodne.

Przystępujemy do obliczania pochodnej funkcji f w zerze.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(h)}{h}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-Ah}{h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(h)-A}{2h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{g'(0)-A}{0}$. Zatem przy $A\neq g'(0)$ pochodna nie istnieje, a przy $A=g'(0)$ możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g''(h)}{2}=\frac{g''(0)}{2}\,.$$

Do udzielenia odpowiedzi potrzebna jest nam tylko znajomość $g'(0)$ oraz $g''(0)$.

Obliczamy

$$g'(0)=\ln\left(\frac{8^3}{16^2}\right)=\ln 2^{9-8}=\ln 2\,.$$

Ponadto funkcja g'' wyraża się wzorem

$$g''(x)=\frac{d}{dx}(3\ln(x+8)-2\ln(x+16))=\frac{3}{x+8}-\frac{2}{x+16}\,,$$

skąd $g''(0)=3/8-2/16=1/4$ i w konsekwencji $f'(0)=\frac{g''(0)}{2}=1/8$.

Odpowiedź: Funkcja jest różniczkowalna tylko dla $A=\ln 2$ i wówczas $f'(0)=1/8$.