ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 8, zestaw B, 8.05.2007

Zadanie **15.**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^{+\infty} \frac{21dx}{x^2+63x}$$

lub uzasadnić, że jest rozbieżna.

W przypadku całki zbieżnej pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Szukamy rozkładu funkcji podcałkowej na ułamki proste:

$$\frac{21}{x(x+63)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+63}$$

$$21 = A(x+63) + Bx\,,$$

co po rozwiązaniu daje

$$A = 1/3, \qquad B = -1/3\,.$$

Zatem szukana całka przyjmuje postać

$$\frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+63}dx = \frac{1}{3}(\ln|x| - \ln|x+63|)\Big|_{x=1}^{+\infty} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+63}\right|\Big|_{x=1}^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+63}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1}{64}\right| = \frac{1}{3}\ln\left|\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+63}\right| + \frac{1}{3}\ln 64 = \frac{1}{3}\ln 1 + \ln 4 = \ln 4\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka niewłaściwa jest zbieżna i jej wartość jest równa $\ln 4$.

Odpowiedź można również podać w postaci $2\ln 2$.

Zadanie **16.**

Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty} n^r \left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n+3}+\sqrt[3]{n+4}+\ldots+\sqrt[3]{8n-1}+\sqrt[3]{8n}\right)$$

dla liczby rzeczywistej r dobranej w taki sposób, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie pod znakiem granicy otrzymujemy

$$n^r \sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{n+k} = n^{r+1/3} \sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{\frac{n+k}{n}} = n^{r+1/3} \sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{1+\frac{k}{n}}\,.$$

Dla $r=-4/3$ otrzymujemy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{7n} f\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

W konsekwencji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{7n} f\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}x^{4/3}\Bigg|_{x=1}^{8} = \frac{3}{4}\cdot(16-1)=45/4\,.$$

Odpowiedź: Dla $r=-4/3$ dana w treści zadania granica jest równa 45/4.

Uwagi

I. Równie naturalne jest przyjęcie $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$, co prowadzi do całki

$$\int_0^7 \sqrt[3]{x+1}\,dx\,.$$

II. W rozwiązaniu pominąłem element, którego nie oczekiwałem od rozwiązujących, a mianowicie wyraźne powołanie się na fakt, że dla funkcji ciągłej i odpowiedniego ciągu podziałów przedziału, sumy Riemanna dążą do całki oznaczonej.