ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 8, zestaw A, 8.05.2007

Zadanie **15.**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^{+\infty} \frac{4dx}{x^2+8x}$$

lub uzasadnić, że jest rozbieżna.

W przypadku całki zbieżnej pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Szukamy rozkładu funkcji podcałkowej na ułamki proste:

$$\frac{4}{x(x+8)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+8}$$

$$4 = A(x+8) + Bx\,,$$

co po rozwiązaniu daje

$$A = 1/2, \qquad B = -1/2\,.$$

Zatem szukana całka przyjmuje postać

$$\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+8}dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x| - \ln|x+8|\right)\Bigg|_{x=1}^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+8}\right|\Bigg|_{x=1}^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+8}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{9}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+8}\right| + \frac{1}{2}\ln 9 = \frac{1}{2}\ln 1 + \ln 3 = \ln 3\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka niewłaściwa jest zbieżna i jej wartość jest równa $\ln 3$.

Zadanie **16.**

Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty} n^r\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}+\ldots+\sqrt{16n-1}+\sqrt{16n}\right)$$

dla liczby rzeczywistej r dobranej w taki sposób, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie pod znakiem granicy otrzymujemy

$$n^r\sum_{k=1}^{15n}\sqrt{n+k}=n^{r+1/2}\sum_{k=1}^{15n}\sqrt{\frac{n+k}{n}}=n^{r+1/2}\sum_{k=1}^{15n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\,.$$

Dla $r=-3/2$ otrzymujemy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{15n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{15n}f\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x)=\sqrt{x}$.

W konsekwencji

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{15n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_1^{16}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Bigg|_{x=1}^{16}=\frac{2}{3}\cdot(64-1)=42\,.$$

Odpowiedź: Dla $r=-3/2$ dana w treści zadania granica jest równa 42.

Uwagi

I. Równie naturalne jest przyjęcie $f(x)=\sqrt{x+1}$, co prowadzi do całki

$$\int_0^{15}\sqrt{x+1}\,dx\,.$$

II. W rozwiązaniu pominąłem element, którego nie oczekiwałem od rozwiązujących, a mianowicie wyraźne powołanie się na fakt, że dla funkcji ciągłej i odpowiedniego ciągu podziałów przedziału, sumy Riemanna dążą do całki oznaczonej.