ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 7, zestaw B, 24.04.2007

Zadanie **13.**

Obliczyć całkę

$$\int_2^4 \frac{dx}{x^2-6x+10}\,.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\int_2^4 \frac{dx}{x^2-6x+10} = \int_2^4 \frac{dx}{(x-3)^2+1}\,.$$

Wykonując podstawienie $y=x-3$, co daje formalny wzór $dy=dx$, otrzymujemy

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{y^2+1} = \operatorname{arctg} y\Big|_{y=-1}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \pi/4-(-\pi/4) = \pi/2\,.$$

Zadanie **14.**

Wyprowadzić wzór na całkę nieoznaczoną

$$\int \sin nx \cdot \cos 3x \, dx$$

w zależności od parametru całkowitego dodatniego n.

Jeśli wpadniesz w pułapkę, możesz otrzymać maksymalnie 3 punkty.

Rozwiązanie:

Oznaczmy szukaną całkę przez I i wykonajmy dwukrotne całkowanie przez części. Otrzymujemy

$$I = \int \sin nx \cdot \cos 3x \, dx = \frac{-\cos nx}{n} \cdot \cos 3x - \frac{3}{n} \int \cos nx \cdot \sin 3x \, dx =$$
$$= \frac{-\cos nx}{n} \cdot \cos 3x - \frac{3}{n^2} \sin nx \cdot \sin 3x + \frac{9}{n^2} \int \sin nx \cdot \cos 3x \, dx =$$
$$= \frac{-\cos nx}{n} \cdot \cos 3x - \frac{3}{n^2} \sin nx \cdot \sin 3x + \frac{9}{n^2} I \,,$$

skąd

$$\frac{n^2 - 9}{n^2} I = \frac{-\cos nx}{n} \cdot \cos 3x - \frac{3}{n^2} \sin nx \cdot \sin 3x + C_0 \,,$$

co daje

$$I = \frac{n \cos nx \cdot \cos 3x}{9 - n^2} + \frac{3 \sin nx \cdot \sin 3x}{9 - n^2} + C \,.$$

Tyle rozwiązania za 3 punkty. Powyższe rozwiązanie zawodzi dla $n = 3$. Dla $n = 3$ po jednym całkowaniu przez części otrzymujemy

$$I = \int \sin 3x \cdot \cos 3x \, dx = \frac{-\cos 3x}{3} \cdot \cos 3x - \frac{3}{3} \int \cos 3x \cdot \sin 3x \, dx = \frac{-\cos 3x}{3} \cdot \cos 3x - I \,,$$

skąd

$$I = -\frac{\cos^2 3x}{6} + C \,.$$

Odpowiedź:

$$\int \sin nx \cdot \cos 3x \, dx = \begin{cases} \dfrac{n \cos nx \cdot \cos 3x}{9 - n^2} + \dfrac{3 \sin nx \cdot \sin 3x}{9 - n^2} + C & \text{dla} \quad n \neq 3 \\ -\dfrac{\cos^2 3x}{6} + C & \text{dla} \quad n = 3 \end{cases}$$