ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 7, zestaw A, 24.04.2007

Zadanie **13.**

Obliczyć całkę

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2-4x+5}\,.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2-4x+5}=\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^2+1}\,.$$

Wykonując podstawienie $y=x-2$, co daje formalny wzór $dy=dx$, otrzymujemy

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{y^2+1}=\operatorname{arctg} y\Big|_{y=-1}^{1}=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)=\pi/4-(-\pi/4)=\pi/2\,.$$

Zadanie **14.**

Wyprowadzić wzór na całkę nieoznaczoną

$$\int \sin 5x \cdot \cos nx \, dx$$

w zależności od parametru całkowitego dodatniego n.

Jeśli wpadniesz w pułapkę, możesz otrzymać maksymalnie 3 punkty.

Rozwiązanie:

Oznaczmy szukaną całkę przez I i wykonajmy dwukrotne całkowanie przez części. Otrzymujemy

$$I = \int \sin 5x \cdot \cos nx \, dx = \frac{-\cos 5x}{5} \cdot \cos nx - \frac{n}{5} \int \cos 5x \cdot \sin nx \, dx =$$
$$= \frac{-\cos 5x}{5} \cdot \cos nx - \frac{n}{25} \sin 5x \cdot \sin nx + \frac{n^2}{25} \int \sin 5x \cdot \cos nx \, dx =$$
$$= \frac{-\cos 5x}{5} \cdot \cos nx - \frac{n}{25} \sin 5x \cdot \sin nx + \frac{n^2}{25} I \,,$$

skąd

$$\frac{25 - n^2}{25} I = \frac{-\cos 5x}{5} \cdot \cos nx - \frac{n}{25} \sin 5x \cdot \sin nx + C_0 \,,$$

co daje

$$I = \frac{5\cos 5x \cdot \cos nx}{n^2 - 25} + \frac{n \sin 5x \cdot \sin nx}{n^2 - 25} + C \,.$$

Tyle rozwiązania za 3 punkty. Powyższe rozwiązanie zawodzi dla $n = 5$. Dla $n = 5$ po jednym całkowaniu przez części otrzymujemy

$$I = \int \sin 5x \cdot \cos 5x \, dx = \frac{-\cos 5x}{5} \cdot \cos 5x - \frac{5}{5} \int \cos 5x \cdot \sin 5x \, dx = \frac{-\cos 5x}{5} \cdot \cos 5x - I \,,$$

skąd

$$I = -\frac{\cos^2 5x}{10} + C \,.$$

Odpowiedź:

$$\int \sin 5x \cdot \cos nx \, dx = \begin{cases} \dfrac{5\cos 5x \cdot \cos nx}{n^2 - 25} + \dfrac{n \sin 5x \cdot \sin nx}{n^2 - 25} + C & \text{dla} \quad n \neq 5 \\ -\dfrac{\cos^2 5x}{10} + C & \text{dla} \quad n = 5 \end{cases}$$