ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 6, zestaw A, 17.04.2007

Zadanie **11.**

Znaleźć taką funkcję rózniczkowalną $F:\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}\to\mathbb{R}$, że

$$F'(x)=\frac{1}{x(x+2)} \tag{666}$$

oraz

$$F(-3)=F(-1)=F(1)=0$$

lub uzasadnić, że taka funkcja nie istnieje.

Rozwiązanie:

Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji F', mamy więc

$$F(x)=\int\frac{1}{x(x+2)}dx\,.$$

Szukamy rozkładu na ułamki proste:

$$\frac{1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$$
$$1=A(x+2)+Bx\,,$$

co po rozwiązaniu daje

$$A=1/2,\qquad B=-1/2\,.$$

Zatem szukana całka przyjmuje postać

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}dx=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+C$$

i taka jest ogólna postać funkcji F spełniającej warunek (666).

Ponieważ dziedzina funkcji F składa się z trzech przedziałów, stała C może być wybrana niezależnie na każdym z nich.

Zatem

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+C_1 & \text{dla}\quad x<-2\\ \frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+C_2 & \text{dla}\quad -2<x<0\\ \frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+C_3 & \text{dla}\quad x>0\end{cases}$$

Wstawiając kolejno $x=-3$, $x=-1$ oraz $x=1$ otrzymujemy

$$C_1=-\frac{\ln 3}{2}, \qquad C_2=0, \qquad C_3=\frac{\ln 3}{2}\,.$$

Odpowiedź:

$$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|-\frac{\ln 3}{2} & \text{dla} \quad x<-2 \\ \frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2| & \text{dla} \quad -2<x<0 \\ \frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+\frac{\ln 3}{2} & \text{dla} \quad x>0 \end{cases}$$

Zadanie **12.**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\,. \tag{1}$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział $[-1,1)$. Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\frac{1}{1-x^3}\,.$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\int\frac{ax^2+bx+c}{1-x^3}dx=$$

$$=(c-b)\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{(b+c)\ln|1-x|}{3}+\frac{(b+c)\ln(x^2+x+1)}{6}-\frac{a\ln|1-x^3|}{3}+C$$

dla $a=0$, $b=0$, $c=1$ otrzymujemy

$$f(x)=\int f'(x)dx=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\ln|1-x|}{3}+\frac{\ln(x^2+x+1)}{6}+C\,. \qquad (2)$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x=0$. Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(0)=0\,,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(0)=\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}(1/\sqrt{3})-\frac{\ln 1}{3}+\frac{\ln 1}{6}+C=$$

$$=\sqrt{3}\pi/18+C\,.$$

Stąd

$$C=-\sqrt{3}\pi/18$$

i ostatecznie

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\ln|1-x|}{3}+\frac{\ln(x^2+x+1)}{6}-\sqrt{3}\pi/18\,. \qquad (3)$$

Przyjmując $x=-1$ we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy $-f(-1)$. Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(-1)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(-1/\sqrt{3}\right)-\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 1}{6}-\sqrt{3}\pi/18=$$

$$=-\sqrt{3}\pi/18-\frac{\ln 2}{3}-\sqrt{3}\pi/18=$$

$$=-\sqrt{3}\pi/9-\frac{\ln 2}{3}\,.$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa

$$\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+\frac{\ln 2}{3}\,.$$