ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 5, zestaw B, 3.04.2007

Zadanie **9.**

Obliczyć całkę

$$\int \frac{e^x-7}{e^{2x}-1}dx\,.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Stosujemy podstawienie $x=\ln t$. Wówczas $t=e^x$, a ponadto uzyskujemy formalny wzór $dx=dt/t$.

Otrzymujemy

$$\int \frac{e^x-7}{e^{2x}-1}dx=\int \frac{t-7}{t(t^2-1)}dt=\int \frac{t-7}{t(t-1)(t+1)}dt\,.$$

Szukamy rozkładu na ułamki proste:

$$\frac{t-7}{t(t-1)(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{D}{t+1}$$

$$t-7=A(t-1)(t+1)+Bt(t+1)+Dt(t-1) \qquad (37)$$

Jeden ze sposobów wyznaczenia liczb A, B, D polega na wymnożeniu prawej strony równości (37) i ułożeniu trzech równań liniowych przez porównanie współczynników przy t^2, t oraz wyrazu wolnego po obu stronach równości.

W przypadku, gdy mianownik funkcji podcałkowej jest iloczynem różnych czynników liniowych, możemy zastosować metodę mniej uciążliwą rachunkowo.

Podstawiając za t w równości (37) kolejno liczby -1, 0, 1 otrzymujemy

$$-8=2D, \qquad -7=-A, \qquad -6=2B\,,$$

skąd

$$A=7, \qquad B=-3, \qquad D=-4\,.$$

Zatem szukana całka przyjmuje postać

$$\int \frac{t-7}{t(t-1)(t+1)}dt=\int \frac{7}{t}-\frac{3}{t-1}-\frac{4}{t+1}dt=7\ln|t|-3\ln|t-1|-4\ln|t+1|+C=$$

$$=7\ln|e^x|-3\ln|e^x-1|-4\ln|e^x+1|+C=7x-3\ln|e^x-1|-4\ln(e^x+1)+C\,.$$

Zadanie **10.**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \operatorname{arctg} x$$

na przedziale $[0{,}37]$ oraz podać punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Korzystając z równości

$$\frac{d}{dx}\frac{1-x}{1+x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x+1} - 1\right) = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = -\frac{2/(x+1)^2}{1+\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^2} + \frac{1}{x^2+1} = -\frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+1} = -\frac{2}{2x^2+2} + \frac{1}{x^2+1} = 0\,.$$

Zatem funkcja f jest stała.

Ponieważ przy tym

$$f(0) = \operatorname{arctg}(1) + \operatorname{arctg} 0 = \pi/4\,,$$

funkcja f jest funkcją stałą o wartości $\pi/4$.

Zatem największą wartością funkcji f jest $\pi/4$ i wartość ta jest osiągana na całym przedziale $[0{,}37]$. Podobnie najmniejszą wartością funkcji f jest $\pi/4$ i wartość ta też jest osiągana na całym przedziale $[0{,}37]$.