ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 5, zestaw A, 3.04.2007

Zadanie **9.**

Obliczyć całkę

$$\int \frac{e^x+5}{e^{2x}-1}dx\,.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Stosujemy podstawienie $x=\ln t$. Wówczas $t=e^x$, a ponadto uzyskujemy formalny wzór $dx=dt/t$.

Otrzymujemy

$$\int \frac{e^x+5}{e^{2x}-1}dx=\int \frac{t+5}{t(t^2-1)}dt=\int \frac{t+5}{t(t-1)(t+1)}dt\,.$$

Szukamy rozkładu na ułamki proste:

$$\frac{t+5}{t(t-1)(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{D}{t+1}$$

$$t+5=A(t-1)(t+1)+Bt(t+1)+Dt(t-1) \tag{37}$$

Jeden ze sposobów wyznaczenia liczb A, B, D polega na wymnożeniu prawej strony równości (37) i ułożeniu trzech równań liniowych przez porównanie współczynników przy t^2, t oraz wyrazu wolnego po obu stronach równości.

W przypadku, gdy mianownik funkcji podcałkowej jest iloczynem różnych czynników liniowych, możemy zastosować metodę mniej uciążliwą rachunkowo.

Podstawiając za t w równości (37) kolejno liczby -1, 0, 1 otrzymujemy

$$4=2D, \qquad 5=-A, \qquad 6=2B\,,$$

skąd

$$A=-5, \qquad B=3, \qquad D=2\,.$$

Zatem szukana całka przyjmuje postać

$$\int \frac{t+5}{t(t-1)(t+1)}dt=\int -\frac{5}{t}+\frac{3}{t-1}+\frac{2}{t+1}dt=-5\ln|t|+3\ln|t-1|+2\ln|t+1|+C=$$
$$=-5\ln|e^x|+3\ln|e^x-1|+2\ln|e^x+1|+C=-5x+3\ln|e^x-1|+2\ln(e^x+1)+C\,.$$

Zadanie **10.**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\operatorname{arctg}x$$

na przedziale [0,37] oraz podać punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Korzystając z równości

$$\frac{d}{dx}\frac{x-1}{x+1}=\frac{d}{dx}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)=\frac{2}{(x+1)^2}$$

obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\frac{2/(x+1)^2}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}-\frac{1}{x^2+1}=\frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2}-\frac{1}{x^2+1}=\frac{2}{2x^2+2}-\frac{1}{x^2+1}=0\,.$$

Zatem funkcja f jest stała.

Ponieważ przy tym

$$f(0)=\operatorname{arctg}(-1)-\operatorname{arctg}0=-\pi/4\,,$$

funkcja f jest funkcją stałą o wartości $-\pi/4$.

Zatem największą wartością funkcji f jest $-\pi/4$ i wartość ta jest osiągana na całym przedziale [0,37]. Podobnie najmniejszą wartością funkcji f jest $-\pi/4$ i wartość ta też jest osiągana na całym przedziale [0,37].