ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 4, zestaw B, 27.03.2007

Zadanie **7.**

Obliczyć całkę

$$\int x^9 \cdot \left(x^5+1\right)^{9/5} dx \, .$$

Rozwiązanie:

Stosujemy podstawienie $t=x^5+1$. Wówczas $x^5=t-1$, a ponadto uzyskujemy formalny wzór $dt=5x^4dx$.

Otrzymujemy

$$\int x^9 \cdot \left(x^5+1\right)^{9/5} dx = \frac{1}{5}\int (t-1)\cdot t^{9/5} dt = \frac{1}{5}\int t^{14/5} - t^{9/5} dt = \frac{t^{19/5}}{19} - \frac{t^{14/5}}{14} + C =$$

$$= \frac{\left(x^5+1\right)^{19/5}}{19} - \frac{\left(x^5+1\right)^{14/5}}{14} + C \, .$$

Zadanie **8.**

Rozważamy wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ciągłe na całej prostej, mające ciągłe pochodne rzędu pierwszego i drugiego oraz spełniające warunki

$$f(2)=f'(2)=1, \qquad \underset{x}{\forall}\ f''(x)\geqslant 1\,.$$

a) (3 punkty) Dowieść, że dla dowolnej funkcji f spełniającej podane warunki zachodzi nierówność $f(0)\geqslant 1$.

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem Taylora istnieje taka liczba $t\in(0,3)$, że

$$f(0)=f(2)+f'(2)\cdot(0-2)+\frac{f''(t)\cdot(0-2)^2}{2}=-2+2f''(t)\geqslant -1+2=1\,.$$

b) (3 punkty) Podać przykład funkcji f spełniającej podane warunki, dla której $f(0)=1$.

Rozwiązanie:

Załózmy że funkcja f oprócz podanych warunków spełnia także warunek

$$\underset{x}{\forall}\ f''(x)=1\,.$$

Oznacza to, że funkcja f jest funkcją kwadratową o współczynniku przy x^2 równym $1/2$.

Niech

$$f(x)=x^2/2+ax+b\,.$$

Wówczas $f'(x)=x+a$ i w konsekwencji

$$f(2)=4/2+2a+b=1$$

oraz

$$f'(2)=2+a=1\,.$$

Zatem $a=-1$ oraz $b=1$.

Przykładem funkcji spełniającej warunki zadania jest więc funkcja zdefiniowana wzorem

$$f(x)=x^2/2-x+1\,.$$