ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 4, zestaw A, 27.03.2007

Zadanie **7.**

Obliczyć całkę

$$\int x^7 \cdot \left(x^4+1\right)^{7/4} dx\,.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy podstawienie $t=x^4+1$. Wówczas $x^4=t-1$, a ponadto uzyskujemy formalny wzór $dt=4x^3dx$.

Otrzymujemy

$$\int x^7 \cdot \left(x^4+1\right)^{7/4} dx = \frac{1}{4}\int (t-1)\cdot t^{7/4}dt = \frac{1}{4}\int t^{11/4}-t^{7/4}dt = \frac{t^{15/4}}{15}-\frac{t^{11/4}}{11}+C=$$

$$=\frac{\left(x^4+1\right)^{15/4}}{15}-\frac{\left(x^4+1\right)^{11/4}}{11}+C\,.$$

Zadanie **8.**

Rozważamy wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ciągłe na całej prostej, mające ciągłe pochodne rzędu pierwszego i drugiego oraz spełniające warunki

$$f(3)=f'(3)=1, \qquad \underset{x}{\forall}\ f''(x)\geqslant 1\,.$$

a) (3 punkty) Dowieść, że dla dowolnej funkcji f spełniającej podane warunki zachodzi nierówność $f(0)\geqslant 5/2$.

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem Taylora istnieje taka liczba $t\in(0,3)$, że

$$f(0)=f(3)+f'(3)\cdot(0-3)+\frac{f''(t)\cdot(0-3)^2}{2}=-2+\frac{9f''(t)}{2}\geqslant -2+9/2=5/2\,.$$

b) (3 punkty) Podać przykład funkcji f spełniającej podane warunki, dla której $f(0)=5/2$.

Rozwiązanie:

Załózmy że funkcja f oprócz podanych warunków spełnia także warunek

$$\underset{x}{\forall}\ f''(x)=1\,.$$

Oznacza to, że funkcja f jest funkcją kwadratową o współczynniku przy x^2 równym $1/2$.

Niech

$$f(x)=x^2/2+ax+b\,.$$

Wówczas $f'(x)=x+a$ i w konsekwencji

$$f(3)=9/2+3a+b=1$$

oraz

$$f'(3)=3+a=1\,.$$

Zatem $a=-2$ oraz $b=5/2$.

Przykładem funkcji spełniającej warunki zadania jest więc funkcja zdefiniowana wzorem

$$f(x)=x^2/2-2x+5/2\,.$$