ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 3, zestaw B, 20.03.2007

Zadanie **5.**

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x)=e^x\cdot\sin x\,.$$

Wyprowadzić wzór na $f^{(1001)}$, czyli pochodną rzędu 1001.

Rozwiązanie:

Obliczamy kolejno

$$f'(x)=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x$$

$$f''(x)=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x+e^x\cdot\cos x-e^x\cdot\sin x=2e^x\cdot\cos x$$

$$f'''(x)=2e^x\cdot\cos x-2e^x\cdot\sin x$$

$$f^{(4)}(x)=2e^x\cdot\cos x-2e^x\cdot\sin x-2e^x\cdot\sin x-2e^x\cdot\cos x=-4e^x\cdot\sin x$$

Widzimy więc, że 4-krotne zróżniczkowanie funkcji f jest równoznaczne z pomnożeniem funkcji f przez -4.

Stąd

$$f^{(1000)}(x)=(-4)^{250}f(x)=2^{500}f(x)$$

i w konsekwencji

$$f^{(1001)}(x)=2^{500}f'(x)=2^{500}\cdot\left(e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x\right)$$

Zadanie **6.**

Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ciągła na całej prostej, a ponadto ma ciągłe pochodne rzędu pierwszego i drugiego. Wiemy też, że

$$f(2)=1, \qquad f'(2)=2, \qquad f(4)=9\,.$$

Uzasadnić krótko prawdziwość poniższych warunków. W punkcie **d)** wpisz w miejsce kropek liczbę, dla której potrafisz uzasadnić prawdziwość podanego warunku. Zmienne a,b,c,d przebiegają zbiór liczb rzeczywistych.

a) (1 punkt) $\underset{a}{\exists} f(a)=7$

Rozwiązanie:

Z własności Darboux funkcji ciągłych wynika, że funkcja f przyjmuje na przedziale $[2,4]$ wszystkie wartości z przedziału $[1,9]$, a więc w szczególności przyjmuje wartość 7.

b) (2 punkty) $\underset{b}{\exists} f'(b)=4$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że w pewnym punkcie b przedziału $[2,4]$ funkcja f' przyjmuje wartość

$$f'(b)=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{9-1}{2}=4\,.$$

c) (2 punkty) $\underset{c}{\exists} f'(c)=3$

Rozwiązanie:

Z własności Darboux funkcji ciągłej f' wynika, że funkcja ta przyjmuje na przedziale $[2,b]$ wszystkie wartości z przedziału $[2,4]$, a więc w szczególności przyjmuje wartość 3.

d) (3 punkty) $\underset{d}{\exists} f''(d)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Rozwiązanie:

Ze wzoru Taylora wynika, ze dla istnieje taka liczba $d\in(2,4)$, że

$$f(4)=f(2)+f'(2)\cdot(4-2)+\frac{f''(d)}{2}\cdot(4-2)^2\,,$$

czyli

$$9=1+4+2f''(d)\,,$$

skąd

$$f''(d)=2\,.$$