

ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski  
KOŁOKWIUM nr **3**, zestaw **A**, 20.03.2007

*Zadanie* **5.**

Funkcja  $f$  jest określona wzorem

$$f(x) = e^x \cdot \cos x .$$

Wyprowadzić wzór na  $f^{(1001)}$ , czyli pochodną rzędu 1001.

*Rozwiązanie:*

Obliczamy kolejno

$$f'(x) = e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x$$

$$f''(x) = e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x = -2e^x \cdot \sin x$$

$$f'''(x) = -2e^x \cdot \sin x - 2e^x \cdot \cos x$$

$$f^{(4)}(x) = -2e^x \cdot \sin x - 2e^x \cdot \cos x - 2e^x \cdot \cos x + 2e^x \cdot \sin x = -4e^x \cdot \cos x$$

Widzimy więc, że 4-krotne zróżniczkowanie funkcji  $f$  jest równoznaczne z pomnożeniem funkcji  $f$  przez  $-4$ .

Stąd

$$f^{(1000)}(x) = (-4)^{250} f(x) = 2^{500} f(x)$$

i w konsekwencji

$$f^{(1001)}(x) = 2^{500} f'(x) = 2^{500} \cdot (e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x)$$

### Zadanie 6.

Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła na całej prostej, a ponadto ma ciągle pochodne rzędu pierwszego i drugiego. Wiemy też, że

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = 1, \quad f(4) = 11.$$

Uzasadnić krótko prawdziwość poniższych warunków. W punkcie **d)** wpisz w miejsce kropek liczbę, dla której potrafisz uzasadnić prawdziwość podanego warunku. Zmienne  $a, b, c, d$  przebiegają zbiór liczb rzeczywistych.

**a) (1 punkt)**  $\exists_a f(a) = 4$

*Rozwiązanie:*

Z własności Darboux funkcji ciągłych wynika, że funkcja  $f$  przyjmuje na przedziale  $[1, 4]$  wszystkie wartości z przedziału  $[2, 11]$ , a więc w szczególności przyjmuje wartość 4.

**b) (2 punkty)**  $\exists_b f'(b) = 3$

*Rozwiązanie:*

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że w pewnym punkcie  $b$  przedziału  $[1, 4]$  funkcja  $f'$  przyjmuje wartość

$$f'(b) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{11 - 2}{3} = 3.$$

**c) (2 punkty)**  $\exists_c f'(c) = 2$

*Rozwiązanie:*

Z własności Darboux funkcji ciągłej  $f'$  wynika, że funkcja ta przyjmuje na przedziale  $[1, 4]$  wszystkie wartości z przedziału  $[1, 11]$ , a więc w szczególności przyjmuje wartość 2.

**d) (3 punkty)**  $\exists_d f''(d) = \dots\dots\dots$

*Rozwiązanie:*

Ze wzoru Taylora wynika, że dla istnieje taka liczba  $d \in (1, 4)$ , że

$$f(4) = f(1) + f'(1) \cdot (4 - 1) + \frac{f''(d)}{2} \cdot (4 - 1)^2,$$

czyli

$$11 = 2 + 3 + \frac{9f''(d)}{2},$$

skąd

$$f''(d) = 4/3.$$