

ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski
KOŁOKWIUM nr **2**, zestaw **B**, 13.03.2007

Zadanie **3.**

Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych a, b , dla których funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^x - ax}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ b & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Dla każdej z wyznaczonych par (a, b) obliczyć $f'(0)$.

Rozwiązanie:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{2h} - e^h - ah}{h^2} - b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h} - e^h - ah - bh^2}{h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{2h} - e^h - a - 2bh}{3h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-a}{0}$. Zatem przy $a \neq 1$ pochodna nie istnieje, a przy $a = 1$ możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4e^{2h} - e^h - 2b}{6h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{3-2b}{0}$. Zatem przy $b \neq 3/2$ pochodna nie istnieje, a przy $b = 3/2$ możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8e^{2h} - e^h}{6} = \frac{7}{6}.$$

Odpowiedź:

Funkcja jest różniczkowalna tylko dla $a = 1$, $b = 3/2$ i wówczas $f'(0) = 7/6$.

Zadanie 4.

Dana jest funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \cos\left(39 \cdot (x^{37/\ln x} + 1)^{38}\right)$$

dla $x \in (1, +\infty)$. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (1, +\infty)$ zachodzi nierówność

$$f'(x) > -40.$$

Rozwiązanie:

Na podstawie tożsamości

$$x^{37/\ln x} = x^{37 \log_x e} = (x^{\log_x e})^{37} = e^{37}$$

otrzymujemy

$$f(x) = \cos\left(39 \cdot (e^{37} + 1)^{38}\right),$$

skąd wynika, że funkcja f jest stała. Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (1, +\infty)$

$$f'(x) = 0 > -40.$$