ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 2, zestaw A, 13.03.2007

Zadanie **3.**

Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych a, b, dla których funkcja

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{3x}-e^{x}-ax}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ b & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Dla każdej z wyznaczonych par (a,b) obliczyć $f'(0)$.

Rozwiązanie:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{3h}-e^{h}-ah}{h^2}-b}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{3h}-e^{h}-ah-bh^2}{h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{3e^{3h}-e^{h}-a-2bh}{3h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{2-a}{0}$. Zatem przy $a\neq 2$ pochodna nie istnieje, a przy $a=2$ możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{9e^{3h}-e^{h}-2b}{6h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{8-2b}{0}$. Zatem przy $b\neq 4$ pochodna nie istnieje, a przy $b=4$ możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{27e^{3h}-e^{h}}{6}=\frac{13}{3}\,.$$

Odpowiedź:

Funkcja jest różniczkowalna tylko dla $a=2$, $b=4$ i wówczas $f'(0)=13/3$.

Zadanie **4.**

Dana jest funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\sin\left(39\cdot\left(x^{37/\ln x}+1\right)^{38}\right)$$

dla $x\in(1,+\infty)$. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x\in(1,+\infty)$ zachodzi nierówność

$$f'(x)<40\,.$$

Rozwiązanie:

Na podstawie tożsamości

$$x^{37/\ln x}=x^{37\log_x e}=\left(x^{\log_x e}\right)^{37}=e^{37}$$

otrzymujemy

$$f(x)=\sin\left(39\cdot\left(e^{37}+1\right)^{38}\right),$$

skąd wynika, że funkcja f jest stała. Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej $x\in(1,+\infty)$

$$f'(x)=0<40\,.$$