ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 1, zestaw A, 6.03.2007

Zadanie **1.**

Wyznaczyć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych a, b, c, d, dla których funkcja

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x\leqslant 0 \\ ax^3+bx^2+cx+d & \text{dla} \quad 0<x<1 \\ 1 & \text{dla} \quad x\geqslant 1 \end{cases}$$

jest różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $f(x^-)$ oraz $f(x^+)$ odpowiednio granice lewo- i prawostronną funkcji f w punkcie x, a przez $f'(x^-)$ oraz $f'(x^+)$ odpowiednie pochodne jednostronne.

Ponieważ $f(0)=f(0^-)=0$ oraz $f(0^+)=d$, funkcja f jest ciągła w punkcie 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $d=0$.

Ponieważ $f'(0)=f'(0^-)=0$ oraz przy założeniu ciągłości funkcji f w zerze $f'(0^+)=c$, funkcja f jest różniczkowalna w punkcie 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $c=0$.

Ponieważ $f(1)=f(1^+)=1$ oraz $f(1^-)=a+b+c+d$, funkcja f jest ciągła w punkcie 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $a+b+c+d=1$.

Ponieważ $f'(1)=f'(1^+)=0$ oraz przy założeniu ciągłości funkcji f w jedynce $f'(1^-)=3a+2b+c$, funkcja f jest różniczkowalna w punkcie 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $3a+2b+c=0$.

Zatem funkcja f jest różniczkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $c=d=0$, $a+b=1$ oraz $3a+2b=0$. Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy jedyne rozwiązanie zadania.

Odpowiedź: Jedyną czwórką liczb spełniającą warunki zadania jest czwórka $a=-2$, $b=3$, $c=d=0$.

Zadanie **2.**

W poniższym zadaniu udziel pięciu odpowiedzi. Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz jeden punkt.

Podać wzór na pochodną funkcji.

a) $f(x) = \ln\ln\ln x \quad f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x}$

b) $f(x) = \cos^3 x \cdot \cos^2 e \quad f'(x) = -3\sin x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 e$

c) $f(x) = (x^3+1)^{20} \quad f'(x) = 60(x^3+1)^{19} x^2$

d) $f(x) = e^{\sqrt{x}} \quad f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \sin(x^2) \quad f'(x) = 2x\cos(x^2)$