ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski
Egzamin 3.07.2007

Zadanie **1.**

W poniższym zadaniu udziel 14 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za udzielenie **n** poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\mathbf{max(0, n-9)}$ **punktów**.

Czy dla dowolnej funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mającej ciągłą pochodną rzędu pierwszego i takiej, że $f(0)=0$, prawdziwa jest podana implikacja (zmienna x przebiega liczby rzeczywiste spełniające nierówność podaną pod kwantyfikatorem)

a) $\left(\underset{x>0}{\forall} f(x)>0\right) \Rightarrow \left(\underset{x>0}{\forall} f'(x)>0\right)$ **NIE**

b) $\left(\underset{x>0}{\forall} f'(x)>0\right) \Rightarrow \left(\underset{x>0}{\forall} f(x)>0\right)$ **TAK**

c) $\left(\underset{x<0}{\forall} f(x)>0\right) \Rightarrow \left(\underset{x<0}{\forall} f'(x)>0\right)$ **NIE**

d) $\left(\underset{x<0}{\forall} f(x)>0\right) \Rightarrow \left(\underset{x<0}{\forall} f'(x)<0\right)$ **NIE**

e) $\left(\underset{x<0}{\forall} f'(x)>0\right) \Rightarrow \left(\underset{x<0}{\forall} f(x)>0\right)$ **NIE**

f) $\left(\underset{x<0}{\forall} f'(x)>0\right) \Rightarrow \left(\underset{x<0}{\forall} f(x)<0\right)$ **TAK**

g) $\left(\underset{x>0}{\forall} f(x)\neq 0\right) \Rightarrow \left(\underset{x>0}{\forall} f'(x)\neq 0\right)$ **NIE**

h) $\left(\underset{x>0}{\forall} f'(x)\neq 0\right) \Rightarrow \left(\underset{x>0}{\forall} f(x)\neq 0\right)$ **TAK**

i) $\left(\underset{x>0}{\forall} f(x)=0\right) \Rightarrow \left(\underset{x>0}{\forall} f'(x)=0\right)$ **TAK**

j) $\left(\underset{x>0}{\forall} f'(x)=0\right) \Rightarrow \left(\underset{x>0}{\forall} f(x)=0\right)$ **TAK**

k) $\left(\underset{x>0}{\exists} f(x)=0\right) \Rightarrow \left(\underset{x>0}{\exists} f'(x)=0\right)$ **TAK**

l) $\left(\underset{x>0}{\exists} f'(x)=0\right) \Rightarrow \left(\underset{x>0}{\exists} f(x)=0\right)$ **NIE**

m) $\left(\underset{x>0}{\exists} f(x)>0\right) \Rightarrow \left(\underset{x>0}{\exists} f'(x)>0\right)$ **TAK**

n) $\left(\underset{x>0}{\exists} f'(x)>0\right) \Rightarrow \left(\underset{x>0}{\exists} f(x)>0\right)$ **NIE**

Zadanie **2.**

W każdym z zadań **1.1-1.3** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**, a w zadaniu **1.4** wstaw znaki w miejsce kropek.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**, a za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

1.1 Czy podany szereg liczbowy o wyrazach zespolonych jest zbieżny

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+i}{n^4+i}$ **NIE**

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^3\cdot i}{n^4+i}$ **NIE**

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+i}{n^4+i}$ **TAK**

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2\cdot i}{n^4+i}$ **TAK**

1.2 Czy funkcja $f(x)=a\cdot|x|+b\cdot\sin|x|+c\cdot\cos|x|$ jest różniczkowalna w zerze, jeżeli

a) $a=1,\ b=1,\ c=1$ **NIE**

b) $a=-1,\ b=1,\ c=1$ **TAK**

c) $a=1,\ b=-1,\ c=1$ **TAK**

d) $a=1,\ b=1,\ c=-1$ **NIE**

1.3 Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\int\limits_{2}^{4} 2^x\,dx>10$ **TAK**

b) $\int\limits_{-10}^{0} 2^x\,dx>10$ **NIE**

c) $\int\limits_{0}^{2} 2^x\,dx>10$ **NIE**

d) $\int\limits_{4}^{5} 2^x\,dx>10$ **TAK**

1.4 Wstaw jeden ze znaków ">", "<", "="

a) $\int\limits_{-1}^{1} x^2\cdot\sqrt{x^8+1}\,dx\ >\ 0$

b) $\int\limits_{-2}^{1} x^3\cdot\sqrt{x^8+1}\,dx\ <\ 0$

c) $\int\limits_{-1}^{2} x^5\cdot\sqrt{x^8+1}\,dx\ >\ 0$

d) $\int\limits_{-2}^{2} x^7\cdot\sqrt{x^8+1}\,dx\ =\ 0$

Zadanie **3.**

Obliczyć wartość całki

$$\int_0^{\pi/3} \cos^5 x \, dx \, .$$

Rozwiązanie:

Zadanie **4.**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{e^x+1}{e^{3x}+e^x}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Zadanie **5.**

Znaleźć największą liczbę całkowitą dodatnią n, dla której istnieje taka liczba rzeczywista A, że funkcja

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-x}-1+\ln(x+1)}{x^n} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'(0)$ dla tych wartości n i A.

Rozwiązanie:

Zadanie **6.**

Wyznaczyć kresy zbioru

$$A = \left\{ \int_0^a x^2 - a \, dx \; : \; a \in (0,3) \right\}$$

i określić, czy należą one do zbioru A.

Rozwiązanie:

Zadanie **7.**

Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego na całej prostej. Wiadomo, że $f(0)=0$, $f(7)=12$, a ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$1<f'(x)<2\,.$$

Dowieść, że wówczas zachodzi nierówność

$$|f(4)-.........|<1\,.$$

W miejsce kropek należy wpisać **konkretną** liczbę rzeczywistą (niezależną od f !!!).

Rozwiązanie:

Zadanie **8.**

Rozstrzygnąć zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{x^p+1}{\sqrt{x^5+x}}\,dx$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego p.

Rozwiązanie: