ANALIZA 1A Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 1, zestaw B, 17.10.2006

Zadanie **1.**

Znaleźć liczby naturalne n oraz k, dla których liczby $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$, $\binom{n}{k+2}$ tworzą (w podanej kolejności) rosnący postęp arytmetyczny trójwyrazowy, a przy tym $\binom{n}{k+2}=2\cdot\binom{n}{k}$. Podać wszystkie rozwiązania.

Rozwiązanie:

Jeżeli liczby a_1, a_2, a_3 tworzą postęp arytmetyczny trójwyrazowy, to $a_2-a_1=a_3-a_2$, czyli $2a_2=a_1+a_3$.

Skoro liczby $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$, $\binom{n}{k+2}$ tworzą postęp arytmetyczny trójwyrazowy, to

$$2\cdot\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+2}=3\cdot\binom{n}{k},$$

czyli

$$\binom{n}{k+1}=\frac{3}{2}\cdot\binom{n}{k}. \qquad (\clubsuit)$$

Ponadto

$$\binom{n}{k+2}=2\cdot\binom{n}{k}=\frac{4}{3}\cdot\binom{n}{k+1}. \qquad (\spadesuit)$$

Przekształcając równość ($\clubsuit$) otrzymujemy kolejno

$$\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}=\frac{3\cdot n!}{2\cdot k!\cdot(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{k!\cdot(k+1)\cdot(n-k-1)!}=\frac{3\cdot n!}{2\cdot k!\cdot(n-k-1)!\cdot(n-k)}$$

$$2(n-k)=3(k+1)$$

$$2n-2k=3k+3$$

$$2n=5k+3. \qquad (\diamondsuit)$$

Podobnie, przekształcając równość ($\spadesuit$) otrzymujemy kolejno

$$\frac{n!}{(k+2)!\cdot(n-k-2)!}=\frac{4\cdot n!}{3\cdot(k+1)!\cdot(n-k-1)!}$$

$$\frac{n!}{(k+1)!\cdot(k+2)\cdot(n-k-2)!}=\frac{4\cdot n!}{3\cdot(k+1)!\cdot(n-k-2)!\cdot(n-k-1)}$$

$$3(n-k-1)=4(k+2)$$

$$3n-3k-3=4k+8$$

$$3n=7k+11. \qquad (\heartsuit)$$

Odejmując stronami od równania ($\heartsuit$) pomnożonego przez 2 równanie ($\diamondsuit$) pomnożone przez 3 otrzymujemy

$$0=-k+13,$$

skąd $k=13$. Wstawiając tę wartość do któregokolwiek z równań ($\heartsuit$) lub ($\diamondsuit$), otrzymujemy $n=34$.

Odpowiedź:

Jedynymi liczbami spełniającymi warunki zadania są liczby $k=13$ i $n=34$.

Zadanie **2.**

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $(6n)!$ nie jest podzielna przez 7^n.

Rozwiązanie:

Niech k będzie taką liczbą całkowitą, że

$$7^k \leqslant 6n < 7^{k+1}\,.$$

Wówczas w rozkładzie liczby $(6n)!$ na czynniki pierwsze liczba 7 występuje z wykładnikiem

$$\left[\frac{6n}{7}\right]+\left[\frac{6n}{7^2}\right]+\left[\frac{6n}{7^3}\right]+\ldots+\left[\frac{6n}{7^k}\right].$$

Korzystając z nierówności $[x]\leqslant x$ oraz ze wzoru na sumę k-wyrazowego postępu geometrycznego o ilorazie $q=1/7$ otrzymujemy

$$\left[\frac{6n}{7}\right]+\left[\frac{6n}{7^2}\right]+\left[\frac{6n}{7^3}\right]+\ldots+\left[\frac{6n}{7^k}\right]\leqslant \frac{6n}{7}+\frac{6n}{7^2}+\frac{6n}{7^3}+\ldots+\frac{6n}{7^k}=$$

$$=\frac{6n}{7}\cdot\frac{1-(1/7)^k}{1-1/7}=\frac{6n}{7}\cdot\frac{1-1/7^k}{6/7}=n\cdot\left(1-\frac{1}{7^k}\right)<n\,.$$

Zatem liczba 7 występuje w rozkładzie liczby $(6n)!$ na czynniki pierwsze z wykładnikiem **mniejszym** od n, a to oznacza, że liczba $(6n)!$ nie jest podzielna przez 7^n.