

ANALIZA 1A Wykład: J. Wróblewski
 KOŁOKWIUM nr **1**, zestaw **A**, 17.10.2006

Zadanie 1.

Znaleźć liczby naturalne n oraz k , dla których liczby $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$, $\binom{n}{k+2}$ tworzą (w podanej kolejności) rosnący postęp arytmetyczny trójwyrazowy, a przy tym $\binom{n}{k+2} = 3 \cdot \binom{n}{k}$. Podać wszystkie rozwiązania.

Rozwiązanie:

Jeżeli liczby a_1, a_2, a_3 tworzą postęp arytmetyczny trójwyrazowy, to $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, czyli $2a_2 = a_1 + a_3$.

Skoro liczby $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$, $\binom{n}{k+2}$ tworzą postęp arytmetyczny trójwyrazowy, to

$$2 \cdot \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+2} = 4 \cdot \binom{n}{k},$$

czyli

$$\binom{n}{k+1} = 2 \cdot \binom{n}{k}. \quad (\clubsuit)$$

Ponadto

$$\binom{n}{k+2} = 3 \cdot \binom{n}{k} = \frac{3}{2} \cdot \binom{n}{k+1}. \quad (\spadesuit)$$

Przekształcając równość (\clubsuit) otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} &= \frac{2 \cdot n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ \frac{n!}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)!} &= \frac{2 \cdot n!}{k! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)} \\ n-k &= 2(k+1) \\ n-k &= 2k+2 \\ n &= 3k+2. \end{aligned} \quad (\diamond)$$

Podobnie, przekształcając równość (\spadesuit) otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(k+2)! \cdot (n-k-2)!} &= \frac{3 \cdot n!}{2 \cdot (k+1)! \cdot (n-k-1)!} \\ \frac{n!}{(k+1)! \cdot (k+2) \cdot (n-k-2)!} &= \frac{3 \cdot n!}{2 \cdot (k+1)! \cdot (n-k-2)! \cdot (n-k-1)} \\ 2(n-k-1) &= 3(k+2) \\ 2n-2k-2 &= 3k+6 \\ 2n &= 5k+8. \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

Odejmując stronami od równania (\heartsuit) równanie (\diamond) pomnożone przez 2 otrzymujemy

$$0 = -k + 4,$$

skąd $k = 4$. Wstawiając tę wartość do któregokolwiek z równań (\heartsuit) lub (\diamond) , otrzymujemy $n = 14$.

Odpowiedź:

Jedynymi liczbami spełniającymi warunki zadania są liczby $k = 4$ i $n = 14$.

Zadanie 2.

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $(10n)!$ nie jest podzielna przez 11^n .

Rozwiązanie:

Niech k będzie taką liczbą całkowitą, że

$$11^k \leq 10n < 11^{k+1}.$$

Wówczas w rozkładzie liczby $(10n)!$ na czynniki pierwsze liczba 11 występuje z wykładnikiem

$$\left[\frac{10n}{11} \right] + \left[\frac{10n}{11^2} \right] + \left[\frac{10n}{11^3} \right] + \dots + \left[\frac{10n}{11^k} \right].$$

Korzystając z nierówności $[x] \leq x$ oraz ze wzoru na sumę k -wyrazowego postępu geometrycznego o ilorazie $q = 1/11$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left[\frac{10n}{11} \right] + \left[\frac{10n}{11^2} \right] + \left[\frac{10n}{11^3} \right] + \dots + \left[\frac{10n}{11^k} \right] &\leq \frac{10n}{11} + \frac{10n}{11^2} + \frac{10n}{11^3} + \dots + \frac{10n}{11^k} = \\ &= \frac{10n}{11} \cdot \frac{1 - (1/11)^k}{1 - 1/11} = \frac{10n}{11} \cdot \frac{1 - 1/11^k}{10/11} = n \cdot \left(1 - \frac{1}{11^k} \right) < n. \end{aligned}$$

Zatem liczba 11 występuje w rozkładzie liczby $(10n)!$ na czynniki pierwsze z wykładnikiem **mniejszym** od n , a to oznacza, że liczba $(10n)!$ nie jest podzielna przez 11^n .