

KOŁOKWIUM nr **12**, zestaw **B**, 16.01.2007Zadanie **23**.

a) (3 punkty) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach nieujemnych i sumie równej 1, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych  $n$  zachodzi równość

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Odpowiedź:

Wystarczy przyjąć  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$  dla  $n \in \{4^k : k \in \mathbb{N}\}$  oraz  $a_n = 0$  dla pozostałych  $n$ .

b) (3 punkty) Podać przykład takiego szeregu potęgowego  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  zbieżnego na całej prostej rzeczywistej, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2 \text{ dla } x = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 18 \text{ dla } x = 3.$$

Odpowiedź:

Wystarczy przyjąć  $a_2 = 2$  oraz  $a_n = 0$  dla  $n \neq 2$ .

c) (10 punktów) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$$

jest rozbieżny.

Odpowiedź:

Wystarczy przyjąć  $a_1 = 0$  oraz  $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$  dla  $n > 1$ .

### Zadanie 24.

W zadaniu 24.1 udziel dwunastu **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za  $n$  poprawnych odpowiedzi otrzymasz  $\max(0, n-8)$  punktów.

W zadaniu 24.2 udziel ośmiu odpowiedzi. Za  $n$  poprawnych odpowiedzi otrzymasz  $\max(0, n-4)$  punktów.

Za udzielenie wszystkich 20 poprawnych odpowiedzi w obu zadaniach otrzymasz **9 punktów**.

24.1 Wyrazy ciągu  $(a_n)$  spełniają warunek

$$\forall_n |a_n - 1| < \frac{1}{n}.$$

Czy stąd wynika, że

- a)  $\forall_n |a_n - 2| > \frac{1}{n}$  **NIE**
- a)  $\forall_n |a_n - 3| > \frac{1}{n}$  **TAK**
- b)  $\forall_n a_n > 0$  **TAK**
- c)  $\forall_n |a_n - 1| < \frac{1}{n^2}$  **NIE**
- ć)  $\forall_n |a_n - 1| < \frac{1}{\sqrt{n}}$  **TAK**
- d)  $\forall_n |a_n - 1| < \frac{1}{3n}$  **NIE**
- e)  $\forall_n |a_n - 1| < \frac{3}{n}$  **TAK**
- e)  $\exists_n |a_n - 1| < \frac{1}{5}$  **TAK**
- f)  $\exists_n |a_n - 1| > \frac{1}{5}$  **NIE**
- g)  $\exists_n a_n > 1$  **NIE**
- h)  $\exists_n a_n < \frac{4}{3}$  **TAK**
- i)  $\forall_n |a_n - a_{n+1}| < \sqrt{2}$  **NIE**

24.2 Podać kresy zbiorów (zbiór  $A$  zdefiniowany w punkcie **a**) występuje w definicjach zbiorów  $X, Y, Z$ ).

- a)  $A = \left\{ \frac{3n-5}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$   $\inf A = -2$   $\sup A = 3$
- b)  $X = \{|a| : a \in A\}$   $\inf X = 1/2$   $\sup X = 3$
- c)  $Y = \{ab : a, b \in A\}$   $\inf Y = -6$   $\sup Y = 9$
- d)  $Z = \{2a - b : a, b \in A\}$   $\inf Z = -7$   $\sup Z = 8$