ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 11, zestaw B, 9.01.2007

Zadanie **21.**

a) (4 punkty) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie równej 3, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Rozwiązanie:

Jednym z prostszych przykładów jest szereg określony wzorami

$$a_1 = 3$$

oraz

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt[3]{2n}}, \qquad a_{2n+1} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2n}}$$

dla $n \geqslant 1$.

Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} - \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \ldots .$$

b) (4 punkty) Podać przykład szeregu potęgowego, którego przedziałem zbieżności jest przedział $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

Rozwiązanie:

Takim szeregiem jest na przykład szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot \left(-\sqrt{2}\right)^n} .$$

Zadanie **22.**

W każdym z zadań **22.1-22.3** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

W zadaniu **22.4** udziel ośmiu odpowiedzi. Za sześć poprawnych odpowiedzi otrzymasz 1 punkt. Za siedem poprawnych odpowiedzi otrzymasz 2 punkty. Za osiem poprawnych odpowiedzi otrzymasz 3 punkty.

Za udzielenie 20 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **7 punktów**.

22.1 O formule zdaniowej $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$ oraz dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+5)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(8) \Rightarrow T(23)$ **TAK**

b) $T(21) \Rightarrow T(16)$ **TAK**

c) $T(7) \Rightarrow T(11)$ **TAK**

d) $T(20) \Rightarrow T(21)$ **TAK**

22.2 Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa S. Czy stąd wynika, że zbieżny jest ciąg (a_n), jeżeli

a) $S=0$ **TAK**

b) $S=1$ **TAK**

c) $S=4/7$ **TAK**

d) $S=7/4$ **TAK**

22.3 Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek

$$\forall_{n} \left|a_n - \frac{4}{n}\right| < \frac{1}{n}\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{n}$ **NIE**

b) $\exists_{n}\ a_n < \frac{\sqrt{21}}{n}$ **NIE**

c) $\exists_{n}\ a_n > 1$ **TAK**

d) $\forall_{n}\ a_n < \frac{\sqrt{31}}{n}$ **TAK**

22.4 Podać kresy zbiorów (zbiór A zdefiniowany w punkcie **a)** występuje w definicjach zbiorów X, Y, Z).

a) $A = \left\{\frac{n-4}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ $\inf A = -3$ $\sup A = 1$

b) $X = \{a^2 : a \in A\}$ $\inf X = 0$ $\sup X = 9$

c) $Y = \{a+b : a,b \in A\}$ $\inf Y = -6$ $\sup Y = 2$

d) $Z = \{a-b : a,b \in A\}$ $\inf Z = -4$ $\sup Z = 4$