ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 11, zestaw A, 9.01.2007

Zadanie **21.**

a) (4 punkty) Podać przykład szeregu potęgowego, którego przedziałem zbieżności jest przedział $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$.

Rozwiązanie:

Takim szeregiem jest na przykład szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^n}\,.$$

b) (4 punkty) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie równej 4, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n=\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

Rozwiązanie:

Jednym z prostszych przykładów jest szereg określony wzorami

$$a_1=4$$

oraz

$$a_{2n}=\frac{1}{\sqrt[4]{2n}}, \qquad a_{2n+1}=-\frac{1}{\sqrt[4]{2n}}$$

dla $n\geqslant 1$.

Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4}}-\frac{1}{\sqrt[4]{4}}+\frac{1}{\sqrt[4]{6}}-\frac{1}{\sqrt[4]{6}}+\ldots\,.$$

Zadanie **22.**

W każdym z zadań **22.1-22.3** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

W zadaniu **22.4** udziel ośmiu odpowiedzi. Za sześć poprawnych odpowiedzi otrzymasz 1 punkt. Za siedem poprawnych odpowiedzi otrzymasz 2 punkty. Za osiem poprawnych odpowiedzi otrzymasz 3 punkty.

Za udzielenie 20 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **7 punktów**.

22.1 O formule zdaniowej $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$ oraz dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+4)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(8) \Rightarrow T(20)$ **TAK**

b) $T(21) \Rightarrow T(13)$ **TAK**

c) $T(6) \Rightarrow T(17)$ **TAK**

d) $T(20) \Rightarrow T(21)$ **TAK**

22.2 Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa S. Czy stąd wynika, że zbieżny jest ciąg (a_n), jeżeli

a) $S=0$ **TAK**

b) $S=1$ **TAK**

c) $S=3/5$ **TAK**

d) $S=5/3$ **TAK**

22.3 Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek

$$\forall_{n} \left|a_n - \frac{3}{n}\right| < \frac{1}{n} .$$

Czy stąd wynika, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{n}$ **NIE**

b) $\exists_{n} \ a_n < \frac{\sqrt{11}}{n}$ **NIE**

c) $\exists_{n} \ a_n > 1$ **TAK**

d) $\forall_{n} \ a_n < \frac{\sqrt{21}}{n}$ **TAK**

22.4 Podać kresy zbiorów (zbiór A zdefiniowany w punkcie **a)** występuje w definicjach zbiorów X, Y, Z).

a) $A = \left\{\frac{n-3}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ $\inf A = -2$ $\sup A = 1$

b) $X = \{a^2 : a \in A\}$ $\inf X = 0$ $\sup X = 4$

c) $Y = \{a+b : a,b \in A\}$ $\inf Y = -4$ $\sup Y = 2$

d) $Z = \{a-b : a,b \in A\}$ $\inf Z = -3$ $\sup Z = 3$