ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 10, zestaw B, 19.12.2006

Zadanie **19.**

a) (3 punkty) Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^7-2n+4}{5n^8-4n^7+2000}\,.$$

Rozwiązanie:

Szacując wyrazy szeregu od dołu otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^7-2n+4}{5n^8-4n^7+2000}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^7-2n^7+0}{5n^8-0+2000n^8}=\frac{3}{2005}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty\,.$$

Stąd na mocy kryterium porównawczego dany w zadaniu szereg jest rozbieżny.

b) (4 punkty) Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n^6-2n+4)\cdot(-1)^n}{5n^8-4n^7+2000}\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy z kryterium zbieżności bezwzględnej:

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny.

Szacując od góry szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(5n^7-2n+4)\cdot(-1)^n}{5n^8-4n^7+2000}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^6-2n+4}{5n^8-4n^7+2000}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^6-0+4n^6}{5n^8-4n^8+0}=9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$$

i korzystając z kryterium porównawczego stwierdzamy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(5n^6-2n+4)\cdot(-1)^n}{5n^8-4n^7+2000}\right|$$

jest zbieżny, a co za tym idzie, zbieżny jest także szereg dany w treści zadania.

Uwagi:

1 punkt za świadomość, że w tym zadaniu właściwą metodą jest skorzystanie z kryterium zbieżności bezwzględnej, z jednoczesnym wykazaniem się znajomością tego kryterium.

3 punkty za poprawne oszacowanie i skorzystanie z kryterium porównawczego.

Kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych w tym zadaniu jest praktycznie bezużyteczne, chociaż na upartego można rozwiązać zadanie z użyciem tego kryterium. Wymaga to jednak dużej dojrzałości rachunkowej, gdyż trzeba zapanować nad dosyć skomplikowanymi nierównościami.

Zadanie **20.**

W każdym z zadań **20.1-20.3** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

W zadaniu **20.4** udziel czterech odpowiedzi. Za trzy poprawne odpowiedzi otrzymasz 1 punkt. Za cztery poprawne odpowiedzi otrzymasz 2 punkty.

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **5 punktów**.

Za udzielenie 16 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **6 punktów**.

20.1 Czy jest prawdą, że

a) $\log_3 7 < \log_3 5$ **NIE**

b) $\log_{1/3} 7 < \log_{1/3} 5$ **TAK**

c) $\log_{1/2} 5 < \log_3 7$ **TAK**

d) $\log_{1/3} 7 < \log_2 5$ **TAK**

20.2 Czy liczba $\binom{n}{7}$ jest podzielna przez $\binom{n}{6}$, jeżeli

a) $n=13$ **TAK**

b) $n=14$ **NIE**

c) $n=18$ **NIE**

d) $n=20$ **TAK**

20.3 Czy funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \geqslant a \\ x+6 & \text{dla} \quad x<a \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

a) $a=-2$ **TAK**

b) $a=-1$ **NIE**

c) $a=2$ **NIE**

d) $a=3$ **TAK**

20.4 Podać sumę szeregu, jeżeli szereg jest zbieżny. Napisać słowo *rozbieżny*, jeżeli szereg jest rozbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \;=\frac{1}{6}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-6)^n} \;=-\frac{1}{7}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} \;=\frac{1}{7}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \;=-\frac{1}{5}$