ANALIZA A1 Wykład: J. Wróblewski

Egzamin 2.02.2007

Zadanie **1.**

W każdym z poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt. Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

1.1 O formule zdaniowej $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(2n)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(3) \Rightarrow T(12)$ **TAK**
b) $T(10) \Rightarrow T(5)$ **NIE**
c) $T(32) \Rightarrow T(16)$ **TAK**
d) $T(6) \Rightarrow T(8)$ **TAK**

1.2 O formule zdaniowej $T(n)$ wiadomo, że $T(1)$ jest prawdziwe, $T(100)$ jest fałszywe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(101)$ jest prawdziwe **TAK**
b) $T(300)$ jest prawdziwe **NIE**
c) $T(50)$ jest fałszywe **TAK**
d) $T(200)$ jest fałszywe **NIE**

1.3 Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n\sqrt{n}+7}$ **NIE**
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+1}{n\sqrt{n}+7}$ **TAK**
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n\sqrt[3]{n}+7}$ **NIE**
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+1}{n\sqrt[3]{n}+7}$ **NIE**

1.4 Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ **NIE**
b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n}+1}$ **NIE**
c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ **TAK**
d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ **TAK**

Zadanie **2.**

W poniższym zadaniu udziel dziesięciu odpowiedzi. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0,n-5)$ punktów.
Przypomnienie: na analizie liczby 0 nie uważamy za liczbę naturalną.

Podać kresy zbiorów.

a) $A=\left\{\frac{n+5}{n+3} : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf A=1$ $\sup A=3/2$

b) $B=\left\{\frac{7^n}{n!} : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf B=0$ $\sup B=7^6/6!$

c) $C=\left\{x^2 : x\in(-3,-2)\cup(1,2)\right\}$ $\inf C=1$ $\sup C=9$

d) $D=\left\{2^{-x} : x\in(-1,2)\right\}$ $\inf D=1/4$ $\sup D=2$

e) $E=\left\{2^{x^2} : x\in(-2,\sqrt{3})\right\}$ $\inf E=1$ $\sup E=16$

Zadanie **3.**

W poniższym zadaniu udziel piętnastu **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0,n-10)$ punktów.

Zmienne m,n,N przebiegają zbiór liczb naturalnych.

Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek

$$\underset{n}{\forall}\ |a_n-n|<\frac{1}{n}\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) ciąg (a_n) jest zbieżny **NIE**

b) ciąg (a_n) jest rozbieżny **TAK**

c) $\underset{n}{\forall}\ a_n>0$ **TAK**

d) $\underset{n}{\exists}\ a_n<37$ **TAK**

e) $\underset{n}{\exists}\ a_n>37$ **TAK**

f) $\underset{N}{\exists}\ \underset{m}{\forall}\ \underset{n}{\forall}\ (N<m<n\Rightarrow|a_m-a_n|<N)$ **NIE**

g) $\underset{m}{\forall}\ \underset{n}{\forall}\ (m\neq n\Rightarrow a_m\neq a_n)$ **NIE**

h) $a_1<a_2$ **NIE**

i) $a_2\neq a_3$ **TAK**

j) $|a_2-a_3|<1$ **NIE**

k) $|a_3-a_4|>\frac{1}{2}$ **NIE**

l) $|a_4-a_5|>\frac{1}{2}$ **TAK**

m) $|a_5-a_6|<\frac{1}{2}$ **NIE**

n) $|a_{37}-a_{73}|<\frac{1}{10}$ **NIE**

o) $|a_{37}-a_{73}|>10$ **TAK**

Zadanie **4.**

Uzasadnienie poprawności przykładów nie jest wymagane.

Za poprawne podanie obydwu przykładów otrzymasz 5 punktów.

a) (2 punkty) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych i sumie równej 1/3, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Rozwiązanie:

Wystarczy przyjąć $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ dla $n \in \left\{64^k : k \in \mathbb{N}\right\}$ oraz $a_n = 0$ dla pozostałych n.

b) (2 punkty) Podać przykład takiego szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 3 \text{ dla } x = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 24 \text{ dla } x = 4\,.$$

Rozwiązanie:

Wystarczy przyjąć $a_0 = -4$, $a_1 = 7$ oraz $a_n = 0$ dla $n \geqslant 2$.

Zadanie **5.**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1}\,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(n-1)(n+1)$ otrzymujemy

$$1 = A(n+1) + B(n-1)\,.$$

Dla $n=1$ otrzymujemy $A=1/2$, natomiast przyjęcie $n=-1$ daje $B=-1/2$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N-1}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+1}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $3/4$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $3/4$.

Zadanie **6.**

Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast pochodnej funkcji używa się tam karopochodnej definiowanej wzorem

$$f^{\diamondsuit}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}\,.$$

Wyprowadzić wzór na $f^{\diamondsuit}(x)$, jeżeli $f(x)=x^3$.

Rozwiązanie:

$$f^{\diamondsuit}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-2x^3+(x-h)^3}{h^2}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6xh^2}{h^2}=\lim_{h\to 0}6x=6x\,.$$

Odpowiedź: $f^{\diamondsuit}(x)=6x$.

Zadanie **7.**

Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 14$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że podana w zadaniu liczba jest niewymierna. Z równości

$$\log_2 14 = 1 + \log_2 7$$

wynika, że zadanie sprowadza się do udowodnienia, że liczba $\log_2 7$ jest niewymierna.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_2 7$ jest wymierna i zapiszmy ją w postaci ułamka m/n o naturalnym liczniku i mianowniku.

Wówczas

$$2^{m/n} = 7\,,$$

skąd

$$2^m = 7^n\,.$$

Jednak powyższa równość nie może zachodzić, ponieważ liczba po lewej stronie jest parzysta, a liczba po prawej stronie jest nieparzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, iż błędne było przypuszczenie, że liczba $\log_2 7$ jest wymierna. Zatem udowodniliśmy, że jest ona niewymierna.

Odpowiedź: Liczba $\log_2 14$ jest niewymierna.

Zadanie **8.**

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^{n^2}}{n^{1000}} .$$

Rozwiązanie:

Stosując kryterium d'Alemberta otrzymujemy

$$\left| \frac{2^{n+1} \cdot x^{(n+1)^2}}{(n+1)^{1000}} \cdot \frac{n^{1000}}{2^n \cdot x^{n^2}} \right| = 2 \cdot |x|^{2n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1000} \to \begin{cases} +\infty > 1 & \text{dla} \quad |x| > 1 \\ 2 > 1 & \text{dla} \quad |x| = 1 \\ 0 < 1 & \text{dla} \quad |x| < 1 \end{cases}$$

Stąd wynika, że dany szereg jest zbieżny tylko dla $|x| < 1$.

Odpowiedź: Przedziałem zbieżności danego szeregu potęgowego jest przedział $(-1,1)$.