ANALIZA A3 Wykład: J. Wróblewski

Egzamin 18.02.2008

Zadanie **1.**

Rozstrzygnąć istnienie granicy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{xyz^5}{x^2+y^4+z^{2n}}$$

w zależności od parametru naturalnego n.

Rozwiązanie:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0\\ x=0}} \frac{xyz^5}{x^2+y^4+z^{2n}} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0^+\\ x=z^n\\ y=z^{n/2}}} \frac{xyz^5}{x^2+y^4+z^{2n}} = \lim_{z\to 0^+} \frac{z^{5+3n/2}}{3z^{2n}} = \lim_{z\to 0^+} \frac{z^{5-n/2}}{3} = \begin{cases} +\infty & \text{dla} \quad n>10 \\ 1/3 & \text{dla} \quad n=10 \\ 0 & \text{dla} \quad n<10 \end{cases}$$

Zatem dla $n \geqslant 10$ dana w treści zadania granica nie istnieje.

Natomiast dla $n<10$ wykorzystujemy nierówności

$$|x| \leqslant \left(x^2+y^4+z^{2n}\right)^{1/2}$$

$$|y| \leqslant \left(x^2+y^4+z^{2n}\right)^{1/4}$$

$$|z| \leqslant \left(x^2+y^4+z^{2n}\right)^{1/2n}$$

do oszacowania

$$\left|\frac{xyz^5}{x^2+y^4+z^{2n}}\right| \leqslant \left(x^2+y^4+z^{2n}\right)^{1/2+1/4+5/2n-1} = \left(x^2+y^4+z^{2n}\right)^{(10-n)/4n} \to 0$$

przy $(x,y,z)\to(0,0,0)$. Na mocy twierdzenia o trzech funkcjach dana w zadaniu granica istnieje i jest równa 0.

Odpowiedź: Dla $n\geqslant 10$ dana w treści zadania granica nie istnieje, natomiast dla $n \leqslant 9$ istnieje i jest równa 0.

Zadanie **2.**

Metryką na zbiorze M nazywamy każdą funkcję $d: M \times M \to [0,+\infty)$ spełniającą warunki:

1° $\underset{x,y \in M}{\forall} (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$

2° $\underset{x,y \in M}{\forall} d(x,y) = d(y,x)$

3° $\underset{x,y,z \in M}{\forall} d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

Rozstrzygnąć, czy funkcja d określona wzorem

$$d((x_1,x_2,x_3),\,(y_1,y_2,y_3)) = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2$$

jest metryką na $\mathbb{R}^3$.

Rozwiązanie:

Nie, bo nie spełnia warunku 3° (nierówność trójkąta).

Niech np. $x = (0,0,0)$, $y = (1,0,0)$, $z = (2,0,0)$.

Wtedy

$$d(x,z) = 4 > 2 = 1 + 1 = d(x,y) + d(y,z)\,.$$

Zadanie **3.**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z)=x+8y+27z$$

na zbiorze

$$Z=\left\{(x,y,z):\, x^3+y^3+z^3=1\right\}$$

oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x punkt $(x,-x,1)$ należy do zbioru Z, a przy tym $f(x,-x,1)=-7x+27$. Ponieważ wyrażenie $-7x+27$ przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste, funkcja f na zbiorze Z przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste.

Odpowiedź: Na zbiorze Z funkcja f jest nieograniczona od góry i od dołu. Kresem dolnym zbioru jej wartości jest $-\infty$, a górnym $+\infty$.

Zadanie **4.**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z)=x+8y+27z$$

na zbiorze

$$Z=\left\{(x,y,z):\, x^4+y^4+z^4=1\right\}$$

oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Oznaczając $g(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-1$ otrzymujemy

$$\mathrm{grad}f(x,y,z)=(1,8,27)$$

oraz

$$\mathrm{grad}g(x,y,z)=(4x^3,4y^3,4z^3)=4(x^3,y^3,z^3)\,.$$

Ponieważ wektor $(1,8,27)$ jest niezerowy, powyższe gradienty są liniowo zależne, gdy wektor (x^3,y^3,z^3) jest wielokrotnością wektora $(1,8,27)$, a więc, gdy $y^3=8x^3$ oraz $z^3=27x^3$. Rozwiązując układ równań

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^4+y^4+z^4 & = & 1 \\ y^3 & = & 8x^3 \\ z^3 & = & 27x^3 \end{array}\right.$$

otrzymujemy kolejno

$$y=2x$$

$$z=3x$$

$$x^4+16x^4+81x^4=1$$

$$98x^4=1$$

$$x=\pm 1/\sqrt[4]{98}$$

$$y=\pm 2/\sqrt[4]{98}$$

$$z=\pm 3/\sqrt[4]{98}\,.$$

Obliczamy wartości funkcji f w otrzymanych punktach krytycznych.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{98}},\frac{2}{\sqrt[4]{98}},\frac{3}{\sqrt[4]{98}}\right)=98^{3/4}\,.$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{98}},-\frac{2}{\sqrt[4]{98}},-\frac{3}{\sqrt[4]{98}}\right)=-98^{3/4}\,.$$

Odpowiedź: Na podanym zbiorze funkcja f osiąga największą wartość równą $98^{3/4}$, a wartość najmniejszą równą $-98^{3/4}$, w punktach podanych wyżej.

Zadanie **5.**

Funkcja f jednej zmiennej jest określona i różniczkowalna w pewnym otoczeniu zera, a ponadto dla każdego punktu x swojej dziedziny spełnia równanie

$$x^2+(f(x))^2=xf(x)+1\,.$$

Obliczyć $f'(0)$.

Rozwiązanie:

Różniczkując stronami równanie dane w treści zadania otrzymujemy

$$2x+2f(x)f'(x)=f(x)+xf'(x)\,,$$

skąd

$$f'(x)=\frac{f(x)-2x}{2f(x)-x}\,,$$

o ile wyrażenie w mianowniku jest różne od zera. Dla $x=0$ otrzymujemy $(f(0))^2=1$, skąd $f(0)=\pm 1$, co daje $2f(0)-0\neq 0$.

Zatem

$$f'(0)=\frac{f(0)}{2f(0)}=\frac{1}{2}$$

niezależnie od $f(0)$.

Zadanie **6.**

Zastosować wzór Greena

$$\int\!\!\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\omega(x,y) = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy$$

do całki krzywoliniowej

$$\int_{\partial\Omega} -y dx + x dy$$

i obszaru

$$\Omega = \left\{ (x,y) : 3|x| - 2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9 \right\}.$$

Obliczyć obie strony wzoru i porównać wyniki.

Rozwiązanie:

Zastosowanie wzoru Greena daje

$$\int_{\partial\Omega} -y dx + x dy = \int\!\!\int_{\Omega} 2 \cdot dx\, dy\,. \tag{422481}$$

Obszar Ω jest kołem o środku $(0, 0)$ i promieniu 3 z usuniętymi dwoma kołami o środkach $(\pm 3/2, 0)$ i promieniach $1/2$.

Zatem całka po prawej stronie wzoru (422481) jest równa podwojonemu polu obszaru Ω, czyli

$$2 \cdot \left(9\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 17\pi\,.$$

Całka po lewej stronie wzoru (422481) jest sumą trzech całek po okręgach.

Pierwszy okrąg ma środek $(0, 0)$, promień 3 i może być sparametryzowany wzorami

$$x = 3\cos t$$

$$y = 3\sin t$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

co prowadzi do

$$\int_{K_1} -y dx + x dy = \int_0^{2\pi} -3\sin t \cdot (-3\sin t) + 3\cos t \cdot 3\cos t\, dt = 18\pi\,.$$

Pozostałe dwa okręgi mają środki $(\pm 3/2, 0)$, promienie $1/2$ i mogą być sparametryzowane wzorami

$$x = \frac{\cos t}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$y = \frac{\sin t}{2}$$
$$t \in [0, 2\pi]$$

co prowadzi do

$$\int\limits_{K_{2,3}} -y dx + x dy = \int\limits_0^{2\pi} -\frac{\sin t}{2} \cdot (-\frac{\sin t}{2}) + \frac{\pm 3 + \cos t}{2} \cdot \frac{\cos t}{2} \, dt = \frac{\pi}{2} \, .$$

Jednak taka parametryzacja wyznacza skierowanie przeciwzegarowe, a okręgi te, jako część brzegu obszaru Ω, są skierowane zegarowo. Musimy więc zmienić znak otrzymanych całek. Ostatecznie lewa strona wzoru (422481) ma wartość

$$18\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 17\pi \, .$$

Zatem obie strony wzoru (422481) mają tę samą wartość równą 17π.

Zadanie **7.**

Wyznaczyć środek ciężkości bryły

$$\Omega=\{(x,y,z):\,x,y\in[-1,1]\wedge 0\leqslant z\leqslant x^2+y^4\}\,.$$

Rozwiązanie:

Z uwagi na symetrię bryły, jej środek ciężkości leży na osi OZ, należy więc tylko wyznaczyć jego współrzędną z-ową.

Obliczamy

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{x^2+y^4} 1\,dz\,dy\,dx=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} x^2+y^4\,dy\,dx=\int\limits_{-1}^{1} 2x^2+\frac{2}{5}\,dx=\frac{4}{3}+\frac{4}{5}=\frac{32}{15}$$

oraz

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{x^2+y^4} z\,dz\,dy\,dx=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\left(x^2+y^4\right)^2}{2}\,dy\,dx=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^4}{2}+x^2y^4+\frac{y^8}{2}\,dy\,dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1} x^4+\frac{2x^2}{5}+\frac{1}{9}\,dx=\frac{2}{5}+\frac{4}{15}+\frac{2}{9}=\frac{18+12+10}{45}=\frac{40}{45}=\frac{8}{9}\,,$$

skąd szukana współrzędna środka ciężkości jest równa

$$\frac{8/9}{32/15}=\frac{5}{12}\,.$$

Odpowiedź: Środek ciężkości bryły Ω leży w punkcie $(0,0,5/12)$.

Zadanie **8.**

Obliczyć wartość całki

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dy\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Przechodząc do współrzędnych biegunowych otrzymujemy

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_{0}^{2}\int_{0}^{2\pi} \frac{r}{1+r^2}\,d\varphi\,dr = 2\pi\int_{0}^{2} \frac{r}{1+r^2}\,dr\,,$$

co po podstawieniu $t=r^2$ prowadzi do

$$\pi\int_{0}^{4} \frac{1}{1+t}\,dt = \pi \ln|t+1|\Big|_{t=0}^{4} = \pi(\ln 5-\ln 1) = \pi\ln 5\,.$$

Odpowiedź: Całka ma wartość $\pi\ln 5$.