ANALIZA A3 Wykład: J. Wróblewski

Egzamin 5.02.2008

Zadanie **1.**

Rozstrzygnąć istnienie granicy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{xyz^n}{x^2+y^4+z^{12}}$$

w zależności od parametru naturalnego n.

Rozwiązanie:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0\\ x=0}} \frac{xyz^n}{x^2+y^4+z^{12}} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0\\ x=z^6\\ y=z^3}} \frac{xyz^n}{x^2+y^4+z^{12}} = \lim_{z\to 0} \frac{z^{9+n}}{3z^{12}} = \begin{cases} \pm\infty & \text{dla} \quad n<3 \\ 1/3 & \text{dla} \quad n=3 \\ 0 & \text{dla} \quad n>3 \end{cases}$$

Zatem dla $n \leqslant 3$ dana w treści zadania granica nie istnieje.

Natomiast dla $n>3$ wykorzystujemy nierówności

$$|x| \leqslant \left(x^2+y^4+z^{12}\right)^{1/2}$$

$$|y| \leqslant \left(x^2+y^4+z^{12}\right)^{1/4}$$

$$|z| \leqslant \left(x^2+y^4+z^{12}\right)^{1/12}$$

do oszacowania

$$\left|\frac{xyz^n}{x^2+y^4+z^{12}}\right| \leqslant \left(x^2+y^4+z^{12}\right)^{1/2+1/4+n/12-1} = \left(x^2+y^4+z^{12}\right)^{(n-3)/12} \to 0$$

przy $(x,y,z)\to(0,0,0)$. Na mocy twierdzenia o trzech funkcjach dana w zadaniu granica istnieje i jest równa 0.

Odpowiedź: Dla $n \leqslant 3$ dana w treści zadania granica nie istnieje, natomiast dla $n \geqslant 4$ istnieje i jest równa 0.

Zadanie **2.**

Wyznaczyć potencjał pola wektorowego

$$\left(\frac{y^2}{1+x^2y^4}, \frac{axy}{1+x^2y^4}\right)$$

dla każdej wartości parametru rzeczywistego a, dla której ma ono potencjał.

Rozwiązanie:

Pole wektorowe (P,Q) nie posiadające osobliwości ma potencjał wtedy i tylko wtedy, gdy $P'_y = Q'_x$.

Obliczamy

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y^2}{1+x^2y^4} = \frac{2y\cdot(1+x^2y^4)-y^2\cdot 4x^2y^3}{(1+x^2y^4)^2} = \frac{2y+2x^2y^5-4x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2} = \frac{2y-2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{axy}{1+x^2y^4} = \frac{ay\cdot(1+x^2y^4)-axy\cdot 2xy^4}{(1+x^2y^4)^2} = \frac{ay+ax^2y^5-2ax^2y^5}{(1+x^2y^4)^2} = \frac{ay-ax^2y^5}{(1+x^2y^4)^2}$$

i stwierdzamy, że powyższe pochodne cząstkowe są tożsamościowo równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a=2$.

Przyjmujemy więc $a=2$ i wyznaczamy potencjał obliczając całkę

$$\int_{(0,0)}^{(x_0,y_0)} \frac{y^2}{1+x^2y^4}dx + \frac{2xy}{1+x^2y^4}dy\,.$$

Do obliczenia całki wykorzystujemy parametryzację

$$x = x_0 t$$
$$y = y_0 t$$
$$t \in [0,1]$$

otrzymując

$$\int_{(0,0)}^{(x_0,y_0)} \frac{y^2}{1+x^2y^4}dx + \frac{2xy}{1+x^2y^4}dy = \int_0^1 \frac{y_0^2t^2}{1+x_0^2y_0^4t^6}\cdot x_0 + \frac{2x_0y_0t^2}{1+x_0^2y_0^4t^6}\cdot y_0\,dt = \int_0^1 \frac{3x_0y_0^2t^2}{1+x_0^2y_0^4t^6}\,dt\,.$$

Jeżeli $x_0=0$ lub $y_0=0$, powyższa całka jest równa 0. W przeciwnym razie po wykonaniu podstawienia

$$s = x_0y_0^2t^3$$
$$ds = 3x_0y_0^2t^2dt$$

otrzymujemy

$$\int_0^{x_0y_0^2} \frac{ds}{1+s^2} = \operatorname{arctg} s\Big|_{s=0}^{x_0y_0^2} = \operatorname{arctg}\left(x_0y_0^2\right),$$

co zgadza się z wartością 0 otrzymaną w przypadku, gdy $x_0=0$ lub $y_0=0$.

Odpowiedź: Podane pole wektorowe ma potencjał tylko dla $a=2$. Wówczas potencjał jest dany wzorem $\operatorname{arctg}(xy^2)$.

Zadanie **3.**

Zmienić kolejność całkowania w całce

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} \sqrt{y}\, dy\, dx\,.$$

Obliczyć obie całki i porównać wyniki.

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość danej w treści zadania całki:

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} \sqrt{y}\, dy\, dx = \int_{-1}^{2} \frac{2}{3} y^{3/2}\Big|_{y=x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^{2} \frac{2}{3}(x+2)^{3/2} - \frac{2}{3}|x|^3\, dx =$$

$$= \frac{4}{15}(x+2)^{5/2} - \frac{1}{6}|x|x^3\Big|_{x=-1}^{2} = \frac{128}{15} - \frac{8}{3} - \frac{4}{15} - \frac{1}{6} = \frac{124}{15} - \frac{8}{3} - \frac{1}{6} = 8 + \frac{4}{15} - 2 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} =$$

$$= 6 + \frac{8-20-5}{30} = 6 - \frac{17}{30} = 5\frac{13}{30} = \frac{163}{30}\,.$$

Pominięcie modułu prowadzi do błędnego wyniku:

$$\int_{-1}^{2} \frac{2}{3}(x+2)^{3/2} - \frac{2}{3}x^3\, dx = \frac{4}{15}(x+2)^{5/2} - \frac{1}{6}x^4\Big|_{x=-1}^{2} = \frac{128}{15} - \frac{8}{3} - \frac{4}{15} + \frac{1}{6} = \frac{124}{15} - \frac{8}{3} + \frac{1}{6} =$$

$$= 8 + \frac{4}{15} - 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 6 + \frac{8-20+5}{30} = 6 - \frac{7}{30} = 5\frac{23}{30} = \frac{173}{30}\,.$$

Zmiana kolejności całkowania prowadzi do całki (należy zrobić rysunek!):

$$\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \sqrt{y}\, dx\, dy + \int_{1}^{4}\int_{y-2}^{\sqrt{y}} \sqrt{y}\, dx\, dy = \int_{0}^{1} 2y\, dy + \int_{1}^{4} y - y\sqrt{y} + 2\sqrt{y}\, dy =$$

$$= y^2\Big|_{y=0}^{1} + \frac{y^2}{2} - \frac{2}{5}y^{5/2} + \frac{4}{3}y^{3/2}\Big|_{y=1}^{4} = 1 + 8 - \frac{64}{5} + \frac{32}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{4}{3} =$$

$$= 1 + 8 - \frac{62}{5} + \frac{28}{3} - \frac{1}{2} = 1 + 8 - 12 - \frac{2}{5} + 9 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 6 + \frac{-12+10-15}{30} =$$

$$= 6 - \frac{17}{30} = 5\frac{13}{30} = \frac{163}{30}\,.$$

Zadanie **4.**

Wyznaczyć i sklasyfikować punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y,z)=ax^2+ay^2+az^2+xy+yz+2xz$$

w zależności od parametru rzeczywistego a.

Wolno pominąć trzy wartości parametru a.

Rozwiązanie:

Gradient funkcji f dany jest wzorem

$$\operatorname{grad} f(x,y,z)=(2ax+y+2z,\, 2ay+x+z,\, 2az+y+2x)\,.$$

Przyrównując gradient do zera otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 2ax+y+2z &= 0 \\ 2ay+x+z &= 0 \\ 2az+y+2x &= 0 \end{cases}$$

Zauważamy, że $x=y=z=0$ jest rozwiązaniem tego układu. Jest to jedyne rozwiązanie, o ile macierz współczynników układu równań ma niezerowy wyznacznik.

Obliczamy

$$\det\begin{pmatrix} 2a & 1 & 2 \\ 1 & 2a & 1 \\ 2 & 1 & 2a \end{pmatrix}=8a^3-12a+4=4\cdot\left(2a^3-3a+1\right)\,.$$

Rozwiązując równanie

$$2a^3-3a+1=0$$

zauważamy, że jest ono spełnione przez $a=1$. Po wydzieleniu przez $a-1$ otrzymujemy

$$2a^2+2a-1=0\,,$$

co ma rozwiązania

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\,.$$

Odrzucamy więc $a=1$ oraz $a=(-1\pm\sqrt{3})/2$, a dla pozostałych wartości parametru a punkt $(0,0,0)$ jest jedynym punktem krytycznym funkcji f.

Hesjan funkcji f ma postać

$$\mathrm{H}\, f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 2 \\ 1 & 2a & 1 \\ 2 & 1 & 2a \end{pmatrix}$$

Zauważamy, że

$$2a \begin{cases} >0 & \text{dla} \quad a>0 \\ =0 & \text{dla} \quad a=0 \\ <0 & \text{dla} \quad a<0 \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix} = 4a^2 - 1 \begin{cases} >0 & \text{dla} \quad |a|>1/2 \\ =0 & \text{dla} \quad |a|=1/2 \\ <0 & \text{dla} \quad |a|<1/2 \end{cases}$$

oraz

$$\det \begin{pmatrix} 2a & 1 & 2 \\ 1 & 2a & 1 \\ 2 & 1 & 2a \end{pmatrix} = 8a^3 - 12a + 4 \begin{cases} >0 & \text{dla} \quad a \in ((-1-\frac{\sqrt{3})}{2}, (-1+\frac{\sqrt{3})}{2}) \cup (1, +\infty) \\ <0 & \text{dla} \quad a \in (-\infty, (-1-\frac{\sqrt{3})}{2}) \cup ((-1+\frac{\sqrt{3})}{2}, 1) \end{cases}$$

Dla $a>1$ hesjan jest dodatnio określony i w punkcie $(0,0,0)$ funkcja f ma lokalne minimum.

Dla $a<(-1-\sqrt{3})/2$ hesjan jest ujemnie określony i w punkcie $(0,0,0)$ funkcja f ma lokalne maximum.

Dla $a \in ((-1-\sqrt{3})/2, (-1+\sqrt{3})/2) \cup ((-1+\sqrt{3})/2, 1)$ hesjan jest nieokreślony i wówczas punkt $(0,0,0)$ jest punktem siodłowym (zrobić schemat znaków poszczególnych wyznaczników i wykorzystać np. nierówność $(-1+\sqrt{3})/2 < 1/2$).

Zadanie **5.**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z)=3x+4y+6z-2|y|$$

na sferze

$$S=\Big\{(x,y,z):\,x^2+y^2+z^2=1\Big\}$$

oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

1° Na półsferze określonej warunkami

$$x^2+y^2+z^2-1=0, \qquad y>0$$

funkcja przyjmuje postać

$$f(x,y,z)=3x+2y+6z\,.$$

Wówczas oznaczając $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ otrzymujemy

$$\mathrm{grad} f(x,y,z)=(3,2,6)$$

oraz

$$\mathrm{grad} g(x,y,z)=(2x,2y,2z)=2(x,y,z)\,.$$

Ponieważ wektor $(3,2,6)$ jest niezerowy, powyższe gradienty są liniowo zależne, gdy wektor (x,y,z) jest wielokrotnością wektora $(3,2,6)$, a więc, gdy $y=2x/3$ oraz $z=2x$. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ y &= 2x/3 \\ z &= 2x \end{cases}$$

otrzymujemy kolejno

$$x^2+4x^3/9+4x^2=1$$

$$49x^2/9=1$$

$$x=\pm 3/7$$

$$y=\pm 2/7$$

$$z=\pm 6/7\,.$$

Wobec nierówności $y>0$ za "$\pm$" przyjmujemy "$+$".

Obliczamy wartość funkcji f w otrzymanym punkcie krytycznym:

$$f\left(\frac{3}{7},\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)=7\,.$$

2° Na półsferze określonej warunkami

$$x^2+y^2+z^2-1=0, \qquad y<0$$

funkcja przyjmuje postać

$$f(x,y,z)=3x+6y+6z\,.$$

Wówczas oznaczając $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ otrzymujemy

$$\operatorname{grad} f(x,y,z)=(3,6,6)$$

oraz

$$\operatorname{grad} g(x,y,z)=(2x,2y,2z)=2(x,y,z)\,.$$

Ponieważ wektor $(3,6,6)$ jest niezerowy, powyższe gradienty są liniowo zależne, gdy wektor (x,y,z) jest wielokrotnością wektora $(3,6,6)$, a więc, gdy $z=y=2x$. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ y &= 2x \\ x &= 2x \end{cases}$$

otrzymujemy kolejno

$$x^2+4x^2+4x^2=1$$

$$9x^2=1$$

$$x=\pm 1/3$$

$$y=z=\pm 2/3\,.$$

Wobec nierówności $y<0$ za "$\pm$" przyjmujemy "$-$".

Obliczamy wartość funkcji f w otrzymanym punkcie krytycznym:

$$f\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=-9\,.$$

3° Na okręgu określonym równaniami

$$x^2+y^2+z^2-1=0, \qquad y=0$$

funkcja przyjmuje postać

$$f(x,y,z)=3x+6z\,.$$

Wówczas oznaczając $g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ oraz $g_2(x,y,z)=y$ otrzymujemy

$$\operatorname{grad} f(x,y,z)=(3,0,6)$$

$$\operatorname{grad} g_1(x,y,z)=(2x,2y,2z)=2(x,y,z)$$

oraz

$$\operatorname{grad} g_2(x,y,z)=(0,1,0)\,.$$

Powyższe gradienty są liniowo zależne, gdy wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jest równy zero. Obliczamy

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 6x - 3z$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 & = & 1 \\ y & = & 0 \\ 6x-3z & = & 0 \end{cases}$$

otrzymujemy kolejno

$$z = 2x$$

$$x^2 + 4x^2 = 1$$

$$5x^2 = 1$$

$$x = \pm 1/\sqrt{5}$$

$$z = \pm 2/\sqrt{5}\,.$$

Obliczamy wartości funkcji f w otrzymanych punktach krytycznych:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 3\sqrt{5} = \sqrt{45} < \sqrt{49} = 7$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -3\sqrt{5} > -3 \cdot 3 = -9\,.$$

Odpowiedź: Na podanym zbiorze funkcja f osiąga najmniejszą wartość -9 w punkcie $(-1/3, -2/3, -2/3)$, a wartość największą równą 7 w punkcie $(3/7, 2/7, 6/7)$.

Zadanie **6.**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

na zbiorze

$$Z=\Big\{(x,y,z):\, x^2+y^2=z^2 \wedge x^2+y^2+z^2=14z-24\Big\}$$

oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Dowolny punkt (x,y,z) należacy do zbioru Z spełnia warunek

$$2z^2=14z-24\,,$$

czyli

$$z^2=7z-12\,,$$

skąd $z=3$ lub $z=4$.

Zatem zbiór Z składa się z dwóch okręgów:

$$z=3, \qquad x^2+y^2=9 \tag{$\clubsuit$}$$

oraz

$$z=4, \qquad x^2+y^2=16\,. \tag{$\spadesuit$}$$

Wobec równania $x^2+y^2=z^2$ funkcja f na zbiorze Z jest dana wzorem $f(x,y,z)=2z^2$.

Odpowiedź: Na okręgu ($\clubsuit$) funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą równą 18, natomiast na okręgu ($\spadesuit$) wartość największą równą 32.

Zadanie **7.**

Obliczyć pole powierzchni fragmentu paraboloidy obrotowej

$$S=\{(x,y,z):\, x^2+y^2=z\leqslant 6\}\,.$$

Rozwiązanie:

Powierzchnia S jest wykresem funkcji, ma więc naturalną parametryzację parametrami x, y

$$x=x$$

$$y=y$$

$$z=x^2+y^2\,,$$

gdzie

$$x^2+y^2\leqslant 6$$

Oznaczając

$$\Omega=\Big\{(x,y):\, x^2+y^2\leqslant 6\Big\}$$

otrzymujemy

$$\int\!\!\int_S 1\cdot dS=\int\!\!\int_\Omega \sqrt{1+4x^2+4y^2}dx\,dy\,,$$

co po przejściu do współrzędnych biegunowych prowadzi do całki

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{1+4r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi=2\pi\int_0^{\sqrt{6}}\sqrt{1+4r^2}\cdot r\,dr\,.$$

Wykonując podstawienie

$$t=4r^2+1$$

$$dt=8r\,dr$$

otrzymujemy

$$\frac{\pi}{4}\int_1^{25}\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{4}\frac{2}{3}t^{3/2}\Bigg|_{t=1}^{25}=\frac{\pi}{6}(125-1)=\frac{124\pi}{6}=\frac{62\pi}{3}\,.$$

Zadanie **8.**

Zastosować wzór Stokes'a

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\!\!\int\limits_{S} R'_y - Q'_z\,dy\,dz + P'_z - R'_x\,dz\,dx + Q'_x - P'_y\,dx\,dy$$

do całki krzywoliniowej

$$\int\limits_{\partial S} x^2 dy$$

i powierzchni

$$S = \{(x,y,z) :\, x^2 + y^2 = z \leqslant 2x\}\,.$$

Obliczyć obie strony wzoru i porównać wyniki.

Rozwiązanie:

Zastosowanie wzoru Stokes'a daje

$$\int\limits_{\partial S} x^2 dy = \int\!\!\int\limits_{S} 2x \cdot dx\,dy\,. \tag{160426514}$$

Powierzchnia S jest wykresem funkcji, ma więc naturalną parametryzację parametrami x, y

$$x = x$$

$$y = y$$

$$z = x^2 + y^2\,,$$

gdzie

$$x^2 + y^2 \leqslant 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 \leqslant 1$$

$$(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\,.$$

Parametryzacja ta wyznacza orientację powierzchni S do góry. Oznaczając

$$\Omega = \Big\{(x,y) :\, (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\Big\}$$

otrzymujemy

$$\iint\limits_{S} 2x dx\, dy = \iint\limits_{\Omega} 2x \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial y} \end{pmatrix} dx\, dy = \iint\limits_{\Omega} 2x dx\, dy\,,$$

co po przejściu do przesuniętych współrzędnych biegunowych

$$x = 1 + r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

prowadzi do całki

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (2 + r\cos\varphi) \cdot r\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r + r^2\cos\varphi\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 + \frac{1}{3}\cos\varphi\, d\varphi = 2\pi\,.$$

Obliczyliśmy więc wartość całki występującej po prawej stronie wzoru (160426514).

Aby obliczyć wartość całki występującej po lewej stronie wzoru (160426514), należy zrozumieć, czym jest brzeg powierzchni S. Otóż jest on elipsą o parametryzacji

$$x = 1 + \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$z = 2 + 2\cos t$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

Parametryzacja ta wyznacza skierowanie elipsy zgodne z orientacją powierzchni S.

$$\int\limits_{\partial S} x^2 dy = \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2 \cdot \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos t + 2\cos^2 t + \cos^3 t\, dt = 2\pi\,.$$

Zatem obie strony wzoru (160426514) mają tę samą wartość równą 2π.