13. Kresy zbiorów.

Konwersatorium 19.12.2006 (zad. 350-367)

Ćwiczenia 20.12.2006 (zad. 336-349, 368)

Definicja: Zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z góry, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in Z}{\forall}\quad x\leqslant M\,.$$

Każdą liczbę rzeczywistą $M\in\mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$\underset{x\in Z}{\forall}\quad x\leqslant M$$

nazywamy ograniczeniem górnym zbioru Z.

Definicja: Zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z dołu, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in Z}{\forall}\quad x\geqslant M\,.$$

Każdą liczbę rzeczywistą $M\in\mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$\underset{x\in Z}{\forall}\quad x\geqslant M$$

nazywamy ograniczeniem dolnym zbioru Z.

Definicja: Zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym, jeżeli jest jednocześnie ograniczony z dołu i z góry.

Definicja: Jeżeli niepusty zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, to kresem górnym zbioru Z nazywamy jego najmniejsze ograniczenie górne i stosujemy oznaczenie $\sup Z$. Istnienie takiego najmniejszego ograniczenia wynika z zasady ciągłości Dedekinda. Jeżeli zbiór Z jest nieograniczony z góry, przyjmujemy $\sup Z=+\infty$. Ponadto przyjmujemy $\sup\emptyset=-\infty$. Analogicznie określamy kres dolny zbioru, oznaczany przez $\inf Z$.

Wniosek: Jeżeli niepusty zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, to liczba G jest jego kresem górnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{x\in Z}{\forall}\quad x\leqslant G$$

oraz

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{x\in Z}{\exists}\quad x>G-\varepsilon\,.$$

Zadania.

Znaleźć kres górny i dolny następujących zbiorów. Zbadać, czy podane zbiory zawierają swoje kresy:

336. $\{x\in\mathbb{R}:\ x^2<2\}$ **337.** $\{\frac{10^n}{n!}:\ n\in\mathbb{N}\}$ **338.** $\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\}$

339. $\{x\in\mathbb{R}:\ x^4\geqslant 5\}$ **340.** $\{\frac{m^2+n^2}{2mn}:\ m,n\in\mathbb{N}\ ,\ m<n\}$

Niech A i B będą niepustymi ograniczonymi zbiorami liczb rzeczywistych. Niech $a_1=\inf A$, $a_2=\sup A$, $b_1=\inf B$, $b_2=\sup B$. Co można powiedzieć o następujących kresach:

341. $\sup(A\cup B)$ **342.** $\inf(A\cup B)$

343. $\sup(A\cap B)$ **344.** $\inf\{-a:\ a\in A\}$

345. $\sup\{a+b:\ a\in A,b\in B\}$ **346.** $\sup\{a^2:\ a\in A\}$

347. $\inf\{a^2:\ a\in A\}$

348. Zbiory A i B są niepuste i ograniczone. Zbiór B jest skończony i wszystkie jego elementy są różne od 0. Czy zbiór $\{\frac{a}{b}:\ a\in A,b\in B\}$ musi być ograniczony? Odpowiedź uzasadnić.

349. A jest takim niepustym zbiorem ograniczonym liczb rzeczywistych, że $\inf A=-1$, $\sup A=2$. Jakie wartości mogą przyjmować kresy zbioru $\{|a|:\ a\in A\}$? Odpowiedź uzasadnić przykładem lub dowodem.

Przeczytaj poniższe warunki. Które z nich są równoważne temu, że $g=\sup A$?

350. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\ a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{a\in A}{\exists}\ a<g+\varepsilon\right)$

351. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\ a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{a\in A}{\exists}\ |a-g|<\varepsilon\right)$

352. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\ a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{a\in A}{\exists}\ a>g-2\varepsilon\right)$

353. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\frac{\varepsilon}{2}\right)$

354. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\frac{1}{n}\right)$

355. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} n^2(g-a)<\frac{1}{n}\right)$

356. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a<g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} (a-g)^2<\varepsilon\right)$

357. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} (a-g)^2<\varepsilon\right)$

358. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon<g}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>\varepsilon\right)$

359. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon<g}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\varepsilon\right)$

360. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{0<\varepsilon<1}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\varepsilon\right)$

361. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a\geqslant g-\varepsilon\right)$

362. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon\geqslant 0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a\geqslant g-\varepsilon\right)$

363. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon\geqslant 0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\varepsilon\right)$

364. $\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\underset{b\in A}{\exists} b\geqslant \frac{g+a}{2}\right)$

365. $\left(\underset{a\in A}{\exists} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\underset{b\in A}{\exists} b\geqslant \frac{g+a}{2}\right)$

366. $\left(\underset{a\in A}{\exists} a^2\geqslant 0\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\underset{b\in A}{\exists} b\geqslant \frac{g+a}{2}\right)$

367. $\left(\underset{a\in A}{\exists} a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{a\in A}{\exists} a>g-\varepsilon\right)$

Niepotrzebne skreślić.

W każdej parze ramek tylko jedna zawiera sensowne uzupełnienie tekstu matematycznego.

TWIERDZENIE **368.** Niech A i B będą niepustymi zbiorami ograniczonymi. Niech
$C=\{a-b:\ a\in A\land b\in B\}$. Wtedy $\inf C=\boxed{\inf A-\sup B}\boxed{\sup B-\inf A}$.

Dowód:

Niech $d=\inf A$ i $g=\sup B$. Wtedy z warunku $d=\inf A$ wynika, że

(1) $\boxed{\underset{a\in A}{\forall}}\boxed{\underset{a\in A}{\exists}}\ \boxed{a\leqslant d}\boxed{a\geqslant d}$

oraz

(2) $\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\forall}}\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\exists}}\ \boxed{\underset{a\in A}{\forall}}\boxed{\underset{a\in A}{\exists}}\ \boxed{a<d+\varepsilon}\boxed{a>d-\varepsilon}$.

Podobnie z warunku $g=\sup B$ wynika

(3) $\boxed{\underset{b\in B}{\forall}}\boxed{\underset{b\in B}{\exists}}\ \boxed{b\leqslant g}\boxed{b\geqslant g}$

oraz

(4) $\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\forall}}\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\exists}}\ \boxed{\underset{b\in B}{\forall}}\boxed{\underset{b\in B}{\exists}}\ \boxed{b<g+\varepsilon}\boxed{b>g-\varepsilon}$.

Chcemy wykazać, że $\inf C=e$, gdzie $e=\boxed{d-g}\boxed{g-d}$, czyli, że

(5) $\boxed{\underset{c\in C}{\forall}}\boxed{\underset{c\in C}{\exists}}\ \boxed{c\leqslant e}\boxed{c\geqslant e}$

oraz

(6) $\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\forall}}\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\exists}}\ \boxed{\underset{c\in C}{\forall}}\boxed{\underset{c\in C}{\exists}}\ \boxed{c<e+\varepsilon}\boxed{c>e-\varepsilon}$.

$\boxed{\text{W dowodzie warunku (5) skorzystamy z (1) i (3).}}$
$\boxed{\text{Zakładając (5) wykażemy prawdziwość warunków (1) i (3).}}$

$\boxed{\text{Dowolna}}\boxed{\text{Istnieje}}$ liczba $c\in C$ $\boxed{\text{jest}}\boxed{\text{będąca}}$ postaci $c=a-b$, gdzie $a\in A$ i $b\in B$. Z nierówności $\boxed{a\leqslant d}\boxed{a\geqslant d}$ i $\boxed{b\leqslant g}\boxed{b\geqslant g}$ otrzymujemy $\boxed{a-b\leqslant e}\boxed{a-b\geqslant e}$, co dowodzi (5).

$\boxed{\text{Załóżmy}}\boxed{\text{Wykażemy}}$ teraz prawdziwość warunku (6).

$\boxed{\text{Niech } \varepsilon \text{ będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy}}$
$\boxed{\text{Znajdziemy taką liczbę dodatnią } \varepsilon\text{, dla której}}$
istnieje $a\in A$ takie, że $\boxed{a>d-\varepsilon}\boxed{a<d+\frac{\varepsilon}{2}}$ oraz $b\in B$ takie, że $\boxed{b<g+\varepsilon}\boxed{b>g-\frac{\varepsilon}{2}}$. Zatem liczba $c=a-b$ spełnia nierówność $\boxed{c<e+\varepsilon}\boxed{c>e-\varepsilon}$, co kończy dowód warunku (6).