

12. Funkcje (c.d.)

Konwersatorium 12.12.2006 (zad. 311-319)

Ćwiczenia 13.12.2006 (zad. 320-335)

Kolokwium nr 10 19.12.2006 (zad. 1-335)

Uwaga: Zapis $\operatorname{sgn}(x)$ oznacza znak liczby x :

$$\operatorname{sgn}(x) = 1 \text{ dla } x > 0$$

$$\operatorname{sgn}(x) = 0 \text{ dla } x = 0$$

$$\operatorname{sgn}(x) = -1 \text{ dla } x < 0$$

Naszkicować wykres funkcji f danej wzorem

311. $f(x) = [x] + x$ **312.** $f(x) = \{x\} + x$ **313.** $f(x) = \left[\left[x - \frac{1}{2} \right] \right]$

Rozwiązać równania i nierówności:

314. $[x] = 2x$ **315.** $\{x\} = |x| - 1$ **316.** $[x] \leq |x|$

317. $\{|x|\} < \frac{x+2}{4}$ **318.** $x^4 - 2x^2 + 1 > 0$ **319.** $x^4 - 4x^2 + 1 > 0$

Wyznaczyć dziedzinę funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem.Określić, w których punktach funkcja f jest ciągła, a w których nieciągła. W zadaniach oznaczonych gwiazdką naszkicować wykres funkcji.

320. $\operatorname{sgn}(\sin x)$ ***321.** $\{x\} - (\{x\})^2$

322.
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ x & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{dla } 1 \leq x < 3 \\ 4 - x & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$$

323.
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \neq 2 \\ \operatorname{sgn}(x) & \text{dla } x = 2 \end{cases}$$

324. $\frac{x^3-1}{x^2-1}$ ***325.** $\text{sgn}(x^3-x)$ **326.** $[x] - [\sqrt[3]{x}]$

327. $x^3 \text{sgn}(x)$ **328.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}+1}$

329. $[x^2]$ **330.** $\{\log_2 x\}$ **331.** $\frac{1}{\{x\}}$ ***332.** $\left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|$

333. Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{dla } x < 1 \\ x^2 & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ ax-b & \text{dla } 2 \leq x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a,b) spełniającej warunki zadania.

334. Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 1 \\ x^2+ax+b & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ x+3 & \text{dla } 2 \leq x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a,b) spełniającej warunki zadania.

OSZUSTWO 335. Niech $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ będą takimi funkcjami ciągłymi, że $f(0) = 5$, $f(1) = 7$, $g(0) = 8$, $g(1) = 4$. Wtedy istnieje takie $c \in (0,1)$, że $f(c) = g(c)$.

Dowód: Z własności Darboux funkcji ciągłych zastosowanej do funkcji f wynika, że dla pewnego $c \in (0,1)$ mamy $f(c) = 6$. Podobnie, stosując własność Darboux do funkcji g otrzymujemy $g(c) = 6$. A zatem $f(c) = g(c)$, co należało dowieść.

□

Wskazać błąd w powyższym rozumowaniu i podać poprawny dowód.