11. Funkcje. Granica i ciągłość.

Konwersatorium 5.12.2006 (zad.271-284)

Ćwiczenia 6.12.2006 (zad. 285-310)

Kolokwium nr 9 12.12.2006 (zad. 1-310)

Uwaga: Zapis $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.
$\{x\}=x-[x]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Naszkicować wykres funkcji f danej wzorem

271. $f(x)=|x^2-1|-|x^2-4|$ **272.** $f(x)=|x^2-8x+15|$

273. $f(x)=x^2+x+2-|x^2-x-2|$ **274.** $f(x)=\{\cos x\}$

275. $f(x)=[\frac{4}{\pi}\mathrm{arctg}x]$ **276.** $f(x)=2\{\sin x\}-\{2\sin x\}$

Rozwiązać równania i nierówności

277. $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$ **278.** $|\cos x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ **279.** $[\sin x]=0$ **280.** $\{\cos x\}=\frac{1}{2}$

281. $\{\frac{4}{\pi}\mathrm{arctg}x\}=0$ **282.** $\{\frac{3}{\pi}\mathrm{arctg}x\}\leqslant\frac{1}{2}$

283. $(x^2-4)\cdot\cos x\geqslant 0$ **284.** $\left(\frac{3}{2}+\sin x\right)^{\sin x}=1$

Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie δ, aby

$$\underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

285. $f(x)=2x$, $x_0=5$, $\varepsilon=1/10$ **286.** $f(x)=1/x$, $x_0=4$, $\varepsilon=1/100$

287. $f(x)=x^2$, $x_0=1$, $\varepsilon=1/50$ **288.** $f(x)=x^3$, $x_0=0$, $\varepsilon=1/1000$

289. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=30$, $\varepsilon=1/10$ **290.** $f(x)=x^4$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{-10}$

Oszustwo **291.** (przykład funkcji nieciągłej): Funkcja $f(x)=x^2$ jest nieciągła.

Dowód: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Zakładając, że funkcja f jest ciągła, weźmy w definicji Cauchy'ego ciągłości $\varepsilon=1$. Wtedy istnieje takie $\delta>0$, że dla y spełniających nierówność $|y-x|<\delta$ zachodzi $|x^2-y^2|<1$.

Jednak ta ostatnia nierówność nie zawsze jest prawdziwa, gdyż dla $x>\frac{1}{\delta}$ i $y=x+\frac{\delta}{2}$ otrzymujemy $|x^2-y^2|=x\delta+\frac{\delta^2}{4}>1$.

□

Oszustwo **292.** (przykład funkcji ciągłej): Funkcja

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases}$$

jest ciągła.

Dowód: Oczywiście f jest ciągła w każdym punkcie oprócz 0, pozostaje więc wykazać ciągłość w 0. Przeprowadzimy dowód niewprost. Zakładając, że f jest nieciągła w 0, weźmy $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Wtedy istnieje takie $\delta>0$, że dla x spełniających nierówność $|x|<\delta$ zachodzi $|f(x)-0|\geqslant\frac{1}{2}$.

Ale biorąc $x=\frac{1}{\pi n}$, gdzie $n>\frac{1}{\pi\delta}$, otrzymujemy $f(x)=0$ i $|x|<\delta$. Zatem $|f(x)-0|=0<\frac{1}{2}$, skąd sprzeczność.

□

Obliczyć następujące granice:

293. $\lim\limits_{x\to 7}\left(\frac{1}{x-7}-\frac{8}{x^2-6x-7}\right)$ **294.** $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ **295.** $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2}$

296. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ **297.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x+2}$ **298.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x-5}$

299. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ **300.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2006}-1}{x^{10}-1}$ **301.** $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

302. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ **303.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ **304.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

305. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ **306.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **307.** $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1+\ln x}$

308. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$ **309.** $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$ **310.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}$