10. Szeregi liczbowe.

Konwersatorium 21,28.11.2006 (zad.201-240)

Ćwiczenia 29.11.2006 (zad. 241-270)

Kolokwium nr 7 28.11.2006 (zad. 1-217)

Kolokwium nr 8 5.12.2006 (zad. 1-270)

Obliczyć $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, a następnie znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

201. $a_k = \frac{1}{7^k}$ **202.** $a_k = \frac{2^k+5^k}{10^k}$

203. Dowieść, że $4 < \sum\limits_{n=1}^{127} \frac{1}{n} < 7$.

204. Dowieść, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

Rozstrzygnąć, czy następujące szeregi są zbieżne

205. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ **206.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ **207.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2+1}$ **208.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$

209. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-1}{n^3+6n^2+8n+47}$ **210.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$

211. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$ **212.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ **213.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$

214. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ **215.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ **216.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$ **217.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$

218. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^3}}{3^n}$ **219.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}}$ **220.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ **221.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

222. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ **223.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$ **224.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$ **225.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}}$

226. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+\operatorname{arctg} n}$ **227.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}}$ **228.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\pi}{n^\pi+e}$

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

229. $a_n > \frac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n, $\forall\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n > 0$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

230. $a_n=\frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=10$.

231. $\forall\limits_{n\in\mathbb{N}} a_{n^2}=\frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=0$.

232. $\forall\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n\in\mathbb{Z}$, $a_n=n$ dla $n\leqslant 100$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

233. $a_n=1$ dla nieskończenie wielu n, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

234. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

235. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}+a_{2n})$ jest zbieżny.

236. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}+a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

237. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{2^n}+a_{2^n+1}+a_{2^n+2}+\ldots+a_{2^{n+1}-1})$$

jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

238. Szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}+a_{2n})$ i $a_1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n}+a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

239. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.

240. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny.

Obliczyć granice

241. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$ **242.** $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{5}{n})^n$

Które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne:

243. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ **244.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 3^n}$ **245.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$

246. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n+1}{n}$ **247.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)(n+9)}}$

248. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}$ **249.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot (-5)^n}{n^n \cdot 2^n}$

250. $1-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots+1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}-\ldots-\frac{1}{k}+\ldots$
(k razy)

251. $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}-\ldots-\frac{1}{k^2}+\ldots$
(k razy)

252. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n}$ **253.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ **254.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!}$ **255.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 77n}{n^2}$

256. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+17}{3^n}$ **257.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!+1}}{n!}$ **258.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}}$ **259.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}(-1)^n$

260. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ **261.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{4^n+3^n}}$

262. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5\sqrt{n}+27}$ **263.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n!}$ **264.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{4^{\binom{n}{2}}}$ **265.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$

266. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$ **267.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ **268.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(\ln n)^{\ln n}(-1)^n}{n^{\ln\ln n}}$

269. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{arctg} n}$ **270.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)(-1)^n$

Kryteria zbieżności szeregów - co każdy student wiedzieć powinien.

1. Warunek konieczny zbieżności.
Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. Zbieżność szeregu nie zależy od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. Kryterium porównanwcze.

Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leqslant b_n$.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. Kilka szeregów.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^a$ jest zbieżny dla $a < -1$, rozbieżny dla pozostałych a.

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a. Logarytm ma dowolną podstawę większą od 1.

5. Kryterium d'Alemberta.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g < 1 \ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g > 1 \ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. Zbieżność bezwzględna.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

7. Szeregi naprzemienne.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^{n+1}$ jest zbieżny.