

**Kolokwia.**

Kolokwium nr 5 odbędzie się na ćwiczeniach w dniu 14.11.2006. Zakres materiału: zad. 1-136, 145-168.

Kolokwium nr 6 odbędzie się na ćwiczeniach w dniu 21.11.2006. Zakres materiału: zad. 1-200.

**8. Kwantyfikatory.**

Konwersatorium 7, 14.11.2006

W poniższych zadaniach  $x, y$  przebiegają liczby rzeczywiste, natomiast  $m, n$  przebiegają liczby naturalne (całkowite dodatnie).

W kolejnych siedmiu zadaniach każdemu warunkowi oznaczonemu literą przypisać równoważny warunek oznaczony cyfrą.

**137.** a)  $x > 0 \Rightarrow -x > 0$     b)  $x > 0 \Rightarrow |x| > 0$

c)  $-x > 0 \Rightarrow x > 0$     d)  $|x| > 0 \Rightarrow x > 0$

1)  $x \geq 0$     2)  $x \leq 0$     3) PRAWDA    4) FAŁSZ

**138.** a)  $\forall_x (x > 0 \Rightarrow -x > 0)$     b)  $\forall_x (x > 0 \Rightarrow |x| > 0)$

c)  $\forall_x (-x > 0 \Rightarrow x > 0)$     d)  $\forall_x (|x| > 0 \Rightarrow x > 0)$

1)  $x \geq 0$     2)  $x \leq 0$     3) PRAWDA    4) FAŁSZ

**139.** a)  $\exists_x (x > 0 \Rightarrow -x > 0)$     b)  $\exists_x (x > 0 \Rightarrow |x| > 0)$

c)  $\exists_x (-x > 0 \Rightarrow x > 0)$     d)  $\exists_x (|x| > 0 \Rightarrow x > 0)$

1)  $x \geq 0$     2)  $x \leq 0$     3) PRAWDA    4) FAŁSZ

**140.** a)  $\forall_y x > y^2$     b)  $\exists_y x > y^2$     c)  $\forall_y x < y^2$     d)  $\exists_y x < y^2$

1)  $x < 0$     2)  $x > 0$     3) PRAWDA    4) FAŁSZ

**141.** a)  $\forall_y x = y$     b)  $\exists_y x = y$     c)  $\forall_y x \neq y$     d)  $\exists_y x \neq y$

1)  $x = 0$     2)  $x > 0$     3) PRAWDA    4) FAŁSZ

**142.** a)  $\forall_y x^2 = -y^2$     b)  $\exists_y x^2 = -y^2$

c)  $\forall_y x^2 \neq -y^2$     d)  $\exists_y x^2 \neq -y^2$

1)  $x = 0$     2)  $x \neq 0$     3) PRAWDA    4) FAŁSZ

143. a)  $\forall_y xy = y$     b)  $\exists_y xy = y$     c)  $\forall_y xy = x$     d)  $\exists_y xy = x$   
 1)  $x = 0$     2)  $x = 1$     3) PRAWDA    4) FAŁSZ

144. Ciąg  $(a_n)$  spełnia warunek

$$\forall_{n > 1000} |a_n - 100| < 10.$$

Czy stąd wynika, że

- a) ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny,  
 b) ciąg  $(a_n)$  jest rozbieżny,  
 c) każdy wyraz ciągu  $(a_n)$  jest dodatni,  
 d) ciąg  $(a_n)$  ma co najmniej jeden wyraz dodatni,  
 e) od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,  
 f)  $a_{666} < 77777777$ ,  
 g)  $a_{1111} > 88$ ,  
 h)  $\forall_{n > 1729} |a_n - 100| < 1$ ,  
 i)  $\forall_{n > 345} |a_n - 100| < 17$ ,  
 j)  $\forall_{n > 5555} |a_n - 99| < 13$ ,  
 k) ciąg  $(a_n)$  jest ograniczony,  
 l)  $\exists_{n > 444} |a_n - 95| < 37$ ,  
 m)  $\exists_{n > 4444} |a_n - 80| < 37$ ,  
 n)  $\exists_{n < 444} |a_n - 95| < 37$ ,  
 o)  $\exists_{n < 4444} |a_n - 80| < 37$ ,  
 p)  $\forall_m \exists_{n > m} a_n > 0$ ,  
 q)  $\forall_{n > 1331} |a_n - 66| > 12$ ,  
 r)  $\forall_{m > 1234} \forall_{n > 5678} |a_n - a_m| < 7$ ,  
 s)  $\forall_{m > 1234} \forall_{n > 5678} |a_n - a_m| < 17$ ,  
 t)  $\forall_{m > 123} \forall_{n > 45678} |a_n - a_m| < 27$ ,  
 u)  $\forall_{m > 1234} \forall_{n > 5678} |a_n - a_m| < 37$ ,  
 v)  $\exists_{m < 123} \exists_{n < 456} |a_n - a_m| < 3$ ,  
 w)  $\forall_{m > 12345} \forall_{n > 67890} |a_n + a_m| < 210$ ,

- x)  $\forall_{m>1296} \forall_{n>7776} |a_n + a_m| < 222$  ,  
 y)  $\forall_{m>1024} \forall_{n>8192} |a_n + a_m| > 128$  ,  
 z)  $\exists_n a_n < 92$  ,  
 ż)  $\exists_n a_n > 91$  .

## 9. Ciągi.

### Trochę teorii

DEFINICJA: Ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny do granicy  $g$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists N \forall_{n \geq N} |a_n - g| < \varepsilon .$$

Piszemy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ .

Ciąg  $(a_n)$  jest **rozbieżny** do  $+\infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall_{n \geq N} a_n > M.$$

Piszemy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

Ciąg  $(a_n)$  jest **rozbieżny** do  $-\infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall_{n \geq N} a_n < M.$$

Piszemy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

TWIERDZENIA:

1. CIĄG ZBIEŻNY MA TYLKO JEDNĄ GRANICĘ.

2. GRANICA SUMY JEST SUMĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżne, to ciąg  $(a_n + b_n)$  jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

3. GRANICA RÓŻNICY JEST RÓŻNICĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżne, to ciąg  $(a_n - b_n)$  jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

4. GRANICA ILOCZYNU JEST ILOCZYNEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżne, to ciąg  $(a_n b_n)$  jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

5. GRANICA ILORAZU JEST ILORAZEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżne, przy czym  $b_n \neq 0$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ , to ciąg  $(\frac{a_n}{b_n})$  jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} .$$

6. ZBIEŻNOŚĆ I GRANICA NIE ZALEŻĄ OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZENIE WIELU POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU.

7. SŁABE NIERÓWNOŚCI ZACHOWUJĄ SIĘ PRZY PRZEJŚCIU DO GRANICY.

Dokładniej, jeśli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżne, przy czym  $a_n \leq b_n$  (odpowiednio  $a_n \geq b_n$ ), to  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  (odpowiednio  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ).

8. KILKA PODSTAWOWYCH GRANIC.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty \text{ dla } a > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \text{ dla } |a| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \text{ nie istnieje nawet w sensie granicy niewłaściwej}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ dla } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

9. Z GRANICĄ MOŻNA WCHODZIĆ POD PIERWIĄSTEK.

Dokładniej, jeśli ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny, przy czym  $a_n \geq 0$ , to dla  $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} .$$

## 10. TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH.

Jeżeli ciągi  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$  spełniają warunek

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz ciągi  $(a_n)$  i  $(c_n)$  są zbieżne do tej samej granicy  $g$ , to ciąg  $(b_n)$  też jest zbieżny i jego granicą jest  $g$ .

## 11. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli  $(a_n)$  jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 ,$$

to ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1 ,$$

to ciąg  $(a_n)$  jest rozbieżny, a ciąg  $(|a_n|)$  jest rozbieżny do  $+\infty$ .

**Uwaga:** Podstawowym zastosowaniem kryterium d'Alemberta jest badanie zbieżności szeregów, ale podana wyżej wersja stosuje się do badania zbieżności ciągów. O szeregach będzie mowa za kilka tygodni.

**Powyższe własności zachowują się w przypadku ciągów mających granice niewłaściwe (tzn. rozbieżnych do  $\pm\infty$ ), o ile nie prowadzi to do wyrażeń nieoznaczonych.**

## 12. SZTUCZKI.

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

### Zadania

Ćwiczenia: 8,15.11.2006 (dzień rektorski został przeniesiony na 22.11.2006)

**145.** Dany jest taki ciąg  $(a_n)$ , że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq 5/\varepsilon} |a_n - 7| < \varepsilon .$$

Podać granicę ciągu  $(a_n)$ .

Wskazać taką liczbę  $M$ , że  $\forall_n |a_n| < M$ .

Wskazać taką liczbę  $N$ , że  $\forall_{n \geq N} a_n > 6$ .

Wskazać taką liczbę  $N$ , że  $\forall_{n \geq N} a_n < 7,01$ .

Wskazać taką liczbę  $N$ , że  $\forall_{n \geq N} |a_n - 8| > 1/3$ .

**146.** Dany jest taki ciąg  $(b_n)$ , że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq 10/\varepsilon} |b_n + 2| < \varepsilon .$$

Podać granicę ciągu  $(b_n)$ .

Wskazać taką liczbę  $M$ , że  $\forall_n |b_n| < M$ .

Wskazać taką liczbę  $N$ , że  $\forall_{n \geq N} b_n < 0$ .

Wskazać taką liczbę  $N$ , że  $\forall_{n \geq N} b_n > -3$ .

Wskazać taką liczbę  $N$ , że  $\forall_{n \geq N} |b_n - 2| > 1/10$ .

**147.** Niech  $c_n = a_n + b_n$ , gdzie  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są ciągami z poprzednich dwóch zadań. Dowieść, że wówczas ciąg  $(c_n)$  jest zbieżny, gdyż

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq \dots\dots\dots/\varepsilon} |c_n - 5| < \varepsilon .$$

W miejscu kropek powinna się znaleźć odpowiednio dobrana liczba.

**148.** Niech  $d_n = a_n \cdot b_n$ , gdzie  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są jak poprzednio. Dowieść, że wówczas ciąg  $(d_n)$  jest zbieżny, gdyż

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq \dots\dots\dots} |d_n + 14| < \varepsilon .$$

W miejscu kropek powinno się znaleźć odpowiednio dobrane wyrażenie zależne od  $\varepsilon$ .

149. Niech  $e_n = 2a_n + 3b_n$ . Dowieść, że wówczas ciąg  $(e_n)$  jest zbieżny, gdyż

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq \dots / \varepsilon} \quad |e_n - \dots| < \varepsilon.$$

W miejscu kropek powinny się znaleźć odpowiednio dobrane liczby.

Wyjaśnić, dlaczego poniżej są same **BZDURY**:

150.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = 0$

151.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty - \infty = 0$

152.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 1 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

153.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = k \cdot 0 = 0$

Zbadać zbieżność ciągu  $(a_n)$  określonego podanym wzorem; obliczyć granice ciągów zbieżnych, rozstrzygnąć czy ciągi rozbieżne mają granicę niewłaściwą

154.  $\frac{n}{n+7}$     155.  $2^n - \frac{1}{n}$     156.  $\frac{4n^2+3n}{n+1}$     157.  $\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$

158.  $\frac{5n^3+n^2-6}{3n^4+7}$     159.  $\frac{5n^4+n^2-6}{3n^4+7}$     160.  $\frac{5n^5+n^2-6}{3n^4+7}$

161.  $\frac{1-2+3-4+5-6+\dots-2n}{\sqrt{n^2+2}}$     162.  $\frac{1+2+4+\dots+2^n}{1+3+9+\dots+3^n}$     163.  $\frac{n}{1+\sqrt{n}}$

164.  $n \cdot (-1)^n$     165.  $\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^7}{n^3(1+7\sqrt{n+2})}$     166.  $\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$

167.  $\frac{3^0+3^1+3^2+3^3+\dots+3^n}{3^n}$     168.  $\frac{\sqrt{3^n+2^n}}{\sqrt{3^n+1}}$     169.  $n^2\sqrt{n}$

170.  $\sqrt[n]{n^2}$     171.  $\sqrt[n]{n+17}$     172.  $\sqrt{n^2+3n} - n$     173.  $n(\sqrt{n^2+7} - n)$

174.  $\frac{7n+(\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3+7n+3}$     175.  $\frac{n^2+n+1}{(n+\sin n)^2}$     176.  $\frac{(-1)^n}{n}$     177.  $\frac{1}{(2+(-1)^n)^n}$

178.  $a_n = \begin{cases} (-1)^n \cdot n! & \text{dla } n \leq 100 \\ \frac{2^n}{2^n+n} & \text{dla } n > 100 \end{cases}$     179.  $\frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \frac{n^2+3}{n^3+3} + \dots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$

180.  $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}$     181.  $\log_2 n$     182.  $\frac{\log_2(2n)}{\log_2 n}$  ( $n > 1$ )

183.  $\frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n}$  ( $n > 1$ )    184.  $\frac{n^7}{7^n}$     185.  $\frac{10^n}{n!}$     186.  $\frac{n!}{n^{22}}$

187.  $\frac{\sqrt{3^n+n^2}}{\sqrt{3^n+2^n+1}}$     188.  $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n}}$     189.  $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)^2}$

190. Dla których liczb rzeczywistych  $a$  istnieje granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+n^a} - \sqrt[3]{n})$  i ile jest równa?

**PRAWDA CZY FAŁSZ?**

191. Jeżeli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są rozbieżne, to ciąg  $(a_n + b_n)$  jest rozbieżny.

192. Jeżeli ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny, a ciąg  $(b_n)$  rozbieżny, to ciąg  $(a_n + b_n)$  jest rozbieżny.

193. Jeżeli ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny, a ciąg  $(b_n)$  rozbieżny, to ciąg  $(a_n b_n)$  jest rozbieżny.

194. Jeżeli ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny, ciąg  $(b_n)$  rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg  $(a_n b_n)$  jest rozbieżny.

195. Jeżeli  $(a_n)$  jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.

196. Jeżeli  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{2}$ , to  $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$ .

197. Jeżeli ciąg  $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$  jest zbieżny, to ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny.

198. Jeżeli ciąg  $(a_n^2)$  jest zbieżny, to ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny.

199. Jeżeli wśród wyrazów ciągu  $(a_n)$  występują zarówno wyrazy dodatnie jak i ujemne, to ciąg  $(a_n)$  jest rozbieżny.

200. Jeżeli wśród wyrazów ciągu  $(a_n)$  występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg  $(a_n)$  jest rozbieżny.