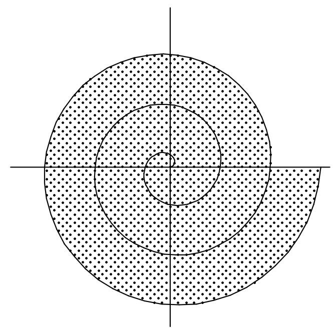
Ćwiczenia 22.01.2008

## 15. Powtórzenie, uzupełnienie (c.d.)

**304.** Spirala Archimedesa ma równanie parametryczne $(t\cos t, t\sin t)$. Obliczyć pole figury naszkicowanej na rysunku obok. Narysowany fragment spirali Archimedesa odpowiada $t \in [0, 6\pi]$.
Rozwiązać zadanie dwoma metodami: wykorzystując podaną parametryzację oraz przechodząc do współrzędnych biegunowych.



**Uwaga:** Podana figura jest zawarta w kole o promieniu $6\pi$ i zawiera koło o promieniu $4\pi$. Upewnić się, że obliczone pole figury zawiera się pomiędzy polami tych kół.

**305.** Wyznaczyć współrzędne środka ciężkości powłoki półkulistej

$$\{(x,y,z):\ 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9,\ z \geqslant 0\}.$$

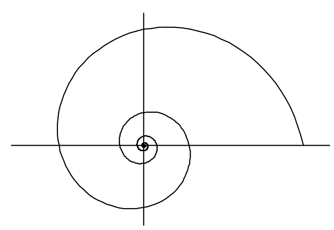
**306.** Obliczyć pole powierzchni fragmentu paraboloidy hiperbolicznej

$$\{(x,y,z):\ z = x^2-y^2,\ x^2+y^2 \leqslant 2\}.$$

**307. a)** Spirala ma równanie parametryczne

$$(e^{-at}\cos t, e^{-at}\sin t), \quad a > 0,$$

gdzie $t \in [0,\infty)$. Obliczyć długość spirali.
**b)** Prosta styczna do spirali w punkcie $A=(1,0)$ przecina oś $OY$ w punkcie $B$. Obliczyć długość odcinka $AB$.



**c)** Cztery psy znajdują się w rogach kwadratowego podwórka. W pewnym momencie każdy z psów zaczyna biec w kierunku psa znajdującego się w sąsiednim (następnym przeciwzegarowo) rogu, odpowiednio zmieniając kierunek w czasie biegu. Prędkości psów są jednakowe. Jaką drogę przebiegnie każdy z psów przed zderzeniem w środku podwórka?

**308.** Obliczyć całkę

$$\iint_T \frac{x}{x^2+7y^2}\,dy\,dz + \frac{y}{x^2+7y^2}\,dz\,dx\,,$$

gdzie

$$T=\{(R\cos\alpha+r\cos\alpha\cos\beta, R\sin\alpha+r\sin\alpha\cos\beta, r\sin\beta):\ \alpha,\beta\in[0,2\pi]\}$$

jest torusem o promieniach $r<R$, zorientowanym na zewnątrz.

**309.** Obliczyć całkę

$$\iint_\Omega x^2+y^2\,d\omega(x,y)\,,$$

gdzie

$$\Omega=\{(x,y):\ |x|\leqslant 3,\ |y|\leqslant 2,\ x^2+y^2\geqslant 1\}\,.$$

**310.** Rozstrzygnąć istnienie granicy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0\\ t\to 0}} \frac{xyzt}{x^2+y^4+z^6+t^8}\,.$$

**311.** Funkcja ciągła $f$ określona w otoczeniu punktu $-1$ spełnia warunki

$$\forall_{x\in D_f}\ x^4+xf(x)+f^4(x)=1$$

oraz $f(-1)=1$.

Obliczyć $f''(-1)$. Przyjąć dwukrotną różniczkowalność $f$ bez dowodu.

**312.** Zastosować twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego do pola wektorowego

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0\right)$$

i bryły

$$\Omega=\{(x,y,z):\ 4\geqslant z\geqslant x^2+y^2\geqslant 1\}\,,$$

a następnie obliczyć obie strony otrzymanej równości i porównać wyniki.

**313.** Obliczyć całkę

$$\int\limits_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \int\limits_{1-\sqrt{1+2x-x^2}}^{1+\sqrt{1+2x-x^2}} \frac{(x+y)^4}{\left(x^2+y^2\right)^5}\,dy\,dx\,.$$

**314.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z)=x+2y+3z$$

na zbiorze

$$S=\left\{(x,y,z):\, x^2+y^2+z^2=1 \wedge x+4y+8z=9\right\}$$

oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

**315.** Dla których wartości parametru naturalnego $n$ zbiór

$$\{(x,y,z):\, x^n+y^n+z^n=n\}$$

jest zwarty?

**316.** Podać przykład takich niepustych zwartych podzbiorów $A$, $B$ przestrzeni, mających niepusty przekrój, że zbiór $A\setminus B$ jest zbiorem niepustym zwartym.

**317. a)** Znaleźć i sklasyfikować punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y)=x^3+y^3-axy$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego $a$.

**b)** Wyznaczyć wartość parametru $a$, dla której sporządzono rysunek obok. Kierunek osi jest standardowy. Narysowane są wszystkie poziomice odpowiadające wartościom całkowitym z przedziału $[-5,5]$.